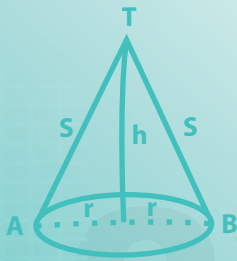
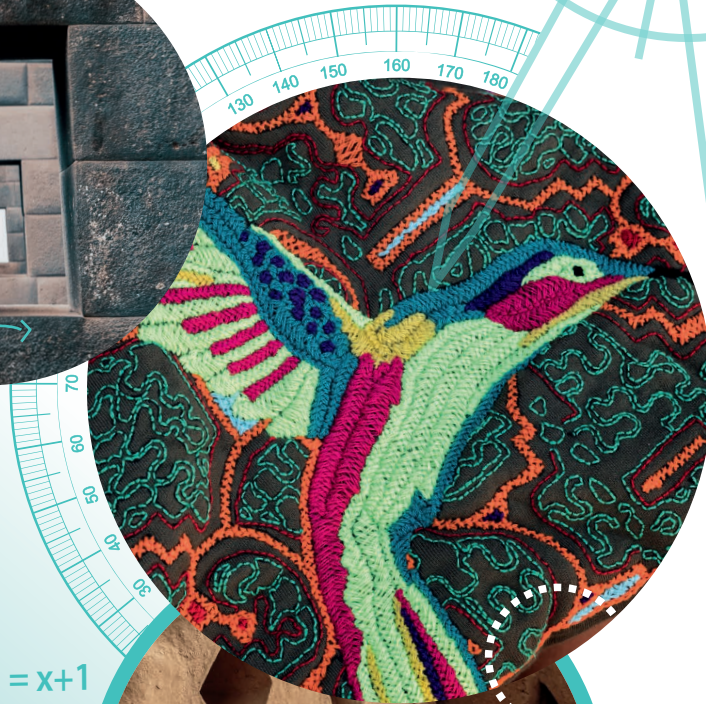
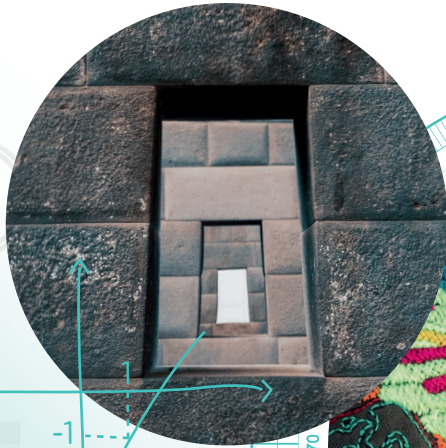


$\pi r^2$

01001010110100 01001010110100

$a^2 + b^2 = c^2$

# Fichas de MATEMÁTICA



$f^{-1}(x) = x+1$



3

REPÚBLICA DEL PERÚ



MINISTERIO DE EDUCACIÓN

# La ciudadana y el ciudadano que queremos

Se **reconoce** como persona valiosa y se identifica con su cultura en diferentes contextos.

**Desarrolla** procesos autónomos de aprendizaje.

**Gestiona** proyectos de manera ética.

**Interpreta** la realidad y toma decisiones con conocimientos matemáticos.

**Propicia** la vida en democracia comprendiendo los procesos históricos y sociales.

**Indaga** y comprende el mundo natural y artificial utilizando conocimientos científicos en diálogo con saberes locales.

## Perfil de egreso

Se **comunica** en su lengua materna, en castellano como segunda lengua y en inglés como lengua extranjera.

**Aprovecha** responsablemente las tecnologías.

**Comprende** y aprecia la dimensión espiritual y religiosa.

**Aprecia** manifestaciones artístico-culturales y crea proyectos de arte.

**Practica** una vida activa y saludable.

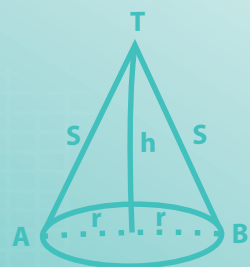
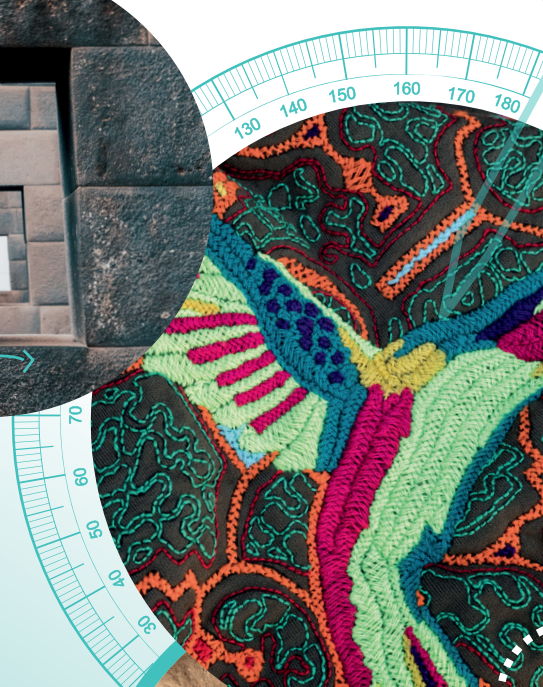
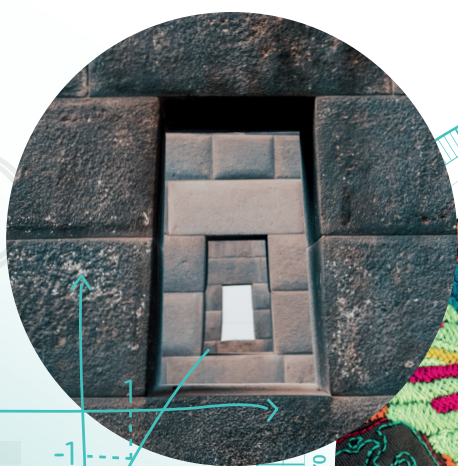


$\pi r^2$

01001010110100 01001010110100

$a^2 + b^2 = c^2$

# Fichas de MATEMÁTICA



$$f^{-1}(x) = x + 1$$



3

$2x^2 = 4$

nome



MINISTERIO DE EDUCACIÓN

## Fichas de Matemática 3

Este material educativo, *Fichas de Matemática 3* para estudiantes de tercer grado de Educación Secundaria, ha sido elaborado por la Dirección de Educación Secundaria para promover el desarrollo de las competencias “Resuelve problemas de cantidad”, “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”, “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización” y “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” propuestas en el Currículo Nacional de Educación Básica.

### Edición

© Ministerio de Educación  
Calle Del Comercio N.º 193, San Borja  
Lima 15021, Perú  
Teléfono: 615-5800  
www.minedu.gob.pe

### Elaboración de contenidos

Larisa Mansilla Fernández  
Olber Muñoz Solís  
Juan Carlos Chávez Espino  
Hugo Luis Támara Salazar  
Hubner Luque Cristóbal Jave  
Enrique García Manyari  
Magaly Corrales Mollo

### Especialista en edición

Oscar Emiliano Palomino Flores

### Revisión pedagógica

Juan Carlos Chávez Espino

### Diseño y diagramación

Cristhiam David Anticona Herrera  
Daniel Zavala Agapito

### Corrección de estilo

Marco Antonio Vigo Esqueche

**Primera edición:** setiembre de 2017

**Segunda edición:** junio de 2019

**Primera reimpresión:** agosto de 2020

**Segunda reimpresión:** diciembre de 2020

**Tercera reimpresión:** agosto de 2021

**Tercera edición:** noviembre de 2022

**Cuarta edición:** octubre de 2023

### Tiraje

517 017 ejemplares

### Impresión

Se terminó de imprimir en noviembre de 2023, en los talleres gráficos de Quad/ Graphics Perú S.R.L., sito en Av. Los Frutales 344, Urb. Los Artesanos, Ate, Lima-Perú.

RUC N.º 20371828851

Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción de este material educativo por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso del Ministerio de Educación.

Debido a la naturaleza dinámica de internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se hace referencia en este material educativo pueden tener modificaciones o desaparecer.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N.º 2023-07500

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*



En este material se usan términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor” y sus respectivos plurales, así como las palabras equivalentes en el contexto educativo, para referirse a hombres y mujeres. Esta opción considera la diversidad y respeta el lenguaje inclusivo, y se emplea para promover una lectura fluida y facilitar la comprensión del texto.



## PRESENTACIÓN

### Estimado estudiante:

Nos complace poner en tus manos el material educativo ***Fichas de Matemática 3***, que, estamos seguros, te ayudará a descubrir la presencia de la matemática en la vida cotidiana y a utilizarla de manera adecuada y creativa en la resolución de problemas vinculados a la realidad.

En su estructura, te proponemos algunos ejemplos de estrategias heurísticas para que las puedas emplear en cada una de las fichas, las cuales se encuentran organizadas en tres secciones: *Construimos nuestros aprendizajes*, *Comprobamos nuestros aprendizajes* y *Evaluamos nuestros aprendizajes*.

En la primera sección, *Construimos nuestros aprendizajes*, te presentamos una situación relacionada con la vida cotidiana, que será abordada a través de interrogantes que pretenden movilizar tus capacidades y conocimientos, lo cual te ayudará a comprender el problema, diseñar o seleccionar una estrategia o plan, ejecutar la estrategia y reflexionar sobre lo desarrollado. En esta y las demás secciones vas a contar con información, datos, conocimientos, entre otros, que te ayudarán a gestionar tus aprendizajes de manera autónoma.

En la segunda sección, *Comprobamos nuestros aprendizajes*, te planteamos tres situaciones de contexto, en cuyo desarrollo podrás explicar el proceso de resolución, identificando las estrategias y describiendo los procedimientos utilizados. Este análisis te permitirá plantear otros caminos de resolución, así como identificar errores, aprender de estos y realizar tu propia corrección.

En la tercera sección, *Evaluamos nuestros aprendizajes*, te presentamos situaciones de diversos grados de complejidad en contextos variados y apoyadas en gráficos. Al desarrollar las actividades que contienen, podrás medir tu progreso teniendo en cuenta criterios de evaluación conocidos de antemano por ti.

Finalmente, puedes desglosar las fichas para desarrollarlas y organizarlas en tu portafolio, de manera que tu docente te brinde retroalimentación u orientación para que puedas seguir mejorando.

Esperamos que con esta experiencia sientas que hacer matemática es un reto posible de alcanzar. Disfrútala.

Ministerio de Educación



# CONTENIDO

## • Conociendo algunas estrategias

5

### ¿Cómo los números racionales nos ayudan a realizar cálculos precisos?

#### Ficha 1

Resuelve problemas de cantidad

- Construimos nuestros aprendizajes 11
- Comprobamos nuestros aprendizajes 15
- Evaluamos nuestros aprendizajes 19

### ¿Cómo tomamos decisiones para solicitar un préstamo de emprendimiento?

#### Ficha 5

Resuelve problemas de cantidad

- Construimos nuestros aprendizajes 53
- Comprobamos nuestros aprendizajes 57
- Evaluamos nuestros aprendizajes 61

### ¿Cómo la progresión geométrica nos permite hacer predicciones?

#### Ficha 2

Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio

- Construimos nuestros aprendizajes 21
- Comprobamos nuestros aprendizajes 25
- Evaluamos nuestros aprendizajes 29

### ¿Cómo podemos determinar valores máximos y mínimos en diversos contextos?

#### Ficha 6

Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio

- Construimos nuestros aprendizajes 63
- Comprobamos nuestros aprendizajes 67
- Evaluamos nuestros aprendizajes 70

### ¿Cómo las transformaciones nos permiten crear nuevos diseños?

#### Ficha 3

Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

- Construimos nuestros aprendizajes 31
- Comprobamos nuestros aprendizajes 35
- Evaluamos nuestros aprendizajes 38

### ¿Cómo optimizamos el espacio empleando relaciones de semejanza y congruencia?

#### Ficha 7

Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

- Construimos nuestros aprendizajes 73
- Comprobamos nuestros aprendizajes 77
- Evaluamos nuestros aprendizajes 81

### ¿Cómo las medidas de dispersión nos ayudan a tomar decisiones?

#### Ficha 4

Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

- Construimos nuestros aprendizajes 41
- Comprobamos nuestros aprendizajes 45
- Evaluamos nuestros aprendizajes 49

### ¿Cómo el cálculo y la interpretación de probabilidades nos ayudan a predecir resultados?

#### Ficha 8

Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

- Construimos nuestros aprendizajes 85
- Comprobamos nuestros aprendizajes 88
- Evaluamos nuestros aprendizajes 93

## CONOCIENDO ALGUNAS ESTRATEGIAS

Un buen resolutor de problemas debe llegar a desarrollar la capacidad de resolver un problema con diversos métodos; además, necesita estar en capacidad de combinar estrategias creativamente. En cada etapa de desarrollo de la solución, debemos definir qué estrategia se utilizará en la siguiente fase.

### 1. Estrategias de comprensión

#### Lectura analítica

Leer analíticamente un texto es dividirlo en unidades que proporcionen algún tipo de información y, luego, establecer cómo estas partes se interrelacionan y muestran el panorama de lo que se quiere decir. Al leer un problema de manera analítica, uno puede hacerse estas preguntas: ¿quiénes participan en la historia?, ¿qué es lo que no varía a lo largo de la historia?, ¿cuáles son las condiciones del texto?, ¿cuáles son los datos que nos proporciona?, ¿qué datos son relevantes para resolver el problema?, ¿qué debemos encontrar?, ¿qué condiciones se imponen a lo que buscamos?, entre otras interrogantes que ayudarán a que cada estudiante se familiarice con el problema y le pierda temor a resolverlo.

La lectura analítica ayuda mucho en la comprensión lectora del problema, y aporta al proceso de solución. Leer analíticamente no es identificar las palabras claves ni buscar tips para encontrar la variable (estos son procesos mecánicos que no ayudan a comprender cabalmente un problema).

En la vida real, los problemas matemáticos pueden no contener esas palabras claves que aparecen en problemas diseñados para libros de texto, por lo que el estudiante enfocará erradamente un problema si hace uso de este mecanismo.

La lectura analítica es importante en la comprensión de problemas, pues estos textos contienen elementos matemáticos como números, diagramas, relaciones dentro de una historia o un contexto real complejo, por lo que no es lo mismo que leer un cuento o un ensayo. De hecho, hay personas que comprenden perfectamente textos humanísticos, pero no aquellos que contienen elementos matemáticos.

#### Parafrasear

Parafrasear es decir algo de otro modo para clarificar y comprender un texto. Explicar un problema con nuestras propias palabras ayuda mucho en el proceso de comprensión. Se debe decir que parafrasear no implica aprenderse de memoria un texto y repetirlo; es señalar lo más importante de una historia y expresarlo con palabras, evitando en lo posible particularidades como números, fechas, nombres, locaciones, etc.

Veamos un ejemplo:

Problema	Parafraseo
Jaime fue el organizador de la fiesta de fin de año de su colegio. Él proyectó ganar S/4800, para lo cual repartió 200 tarjetas; pero, lamentablemente, solo se vendieron 130, lo que le causó una pérdida de S/150. ¿Cuánto invirtió en la fiesta?	Una persona organiza una fiesta. Para ganar necesita vender una cantidad de tarjetas; pero vende menos y pierde.  Nos piden saber cuánto invirtió en la fiesta.

Se sugiere que se realice una lectura analítica de los problemas, que el estudiante produzca sus propios esquemas de comprensión y realice al menos dos parafraseos por cada problema presentado.

#### Hacer esquemas

La capacidad de representar una situación compleja mediante esquemas es algo que se va aprendiendo desde los primeros años de escolaridad y continúa en proceso de construcción toda la vida. Hacer e interpretar esquemas son algunas de las capacidades más necesarias en nuestra vida laboral adulta. En diversas situaciones cotidianas se requiere de la esquematización de los sistemas, las situaciones y los procesos, con el fin de comprenderlos mejor. Un esquema apunta a encontrar una estrategia de solución; no existe una relación directa entre hacer un esquema y dar solución a un problema, pero ayuda mucho en este proceso.

## 2. Estrategias de resolución

Una estrategia importante en la búsqueda de soluciones es representar el problema mediante algún organizador visual. Aquí presentamos algunos organizadores de información que se utilizan frecuentemente en el proceso de resolver problemas matemáticos.

### Diagramas de tiras

Se utilizan mayormente cuando la cantidad que interviene en el problema varía en el tiempo o es dividida en partes que se relacionan entre sí.

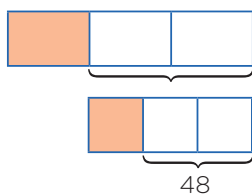
#### Ejemplo:

La tercera parte de las entradas para el estreno de una película se vendieron días antes de la función, y  $\frac{1}{3}$  del resto se vendió el día del estreno. Finalmente, quedaron 48 entradas sin vender. ¿Cuál era el número total de entradas previsto para la función de estreno?

#### Solución:

Cantidad: Número total de entradas.

Elabora un diagrama de tiras.



### Diagramas tabulares (tablas)

Se emplean cuando se brinda información sobre características que relacionan dos grupos. También en problemas sobre edades o de proporcionalidad, en los que se debe buscar algún patrón o regla de formación.

#### Ejemplo:

Dos amigos tienen lápices, borradores y tajadores en sus cartucheras. Hay 8 borradores en total. Mónica tiene el doble de lápices que Felipe, quien tiene 5 tajadores más que lápices. Mónica tiene tantos tajadores como lápices posee Felipe. Mónica tiene 18 útiles y ningún borrador. ¿Cuántos lápices, tajadores y borradores tiene cada uno?

#### Solución:

Grupo 1: Mónica, Felipe.

Grupo 2: Lápices, borradores, tajadores.

	Lápices	Borradores	Tajadores	TOTAL
Mónica	$2x$	0	$x$	18
Felipe	$x$	8	$x + 5$	
TOTAL		8		

### Diagramas analógicos

Se suelen utilizar en problemas geométricos. Son dibujos que representan la realidad de manera similar, pero esquemática, sin considerar los elementos irrelevantes para el problema.

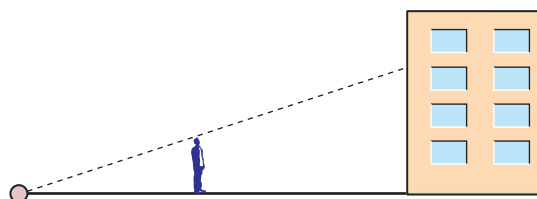
Mediante esta representación es posible visualizar las relaciones entre los datos y las incógnitas.

#### Ejemplo:

Un hombre de 1,8 m de estatura camina hacia un edificio a razón de 1,5 m/s. Si hay una linterna sobre el suelo a 15 m del edificio, ¿cuánto mide la sombra del hombre sobre el edificio cuando se encuentra a 9 m de este?

#### Resolución:

Hagamos un diagrama que represente la situación narrada.



### Diagramas de flujo

Se emplean cuando una cantidad varía a lo largo de la historia o si tenemos la situación final de esta cantidad. También cuando se dan secuencias de pasos para encontrar objetos matemáticos, entre otras aplicaciones.

#### Ejemplo:

Un número se duplica, luego se le resta 8 y después se invierten las cifras de este número. Finalmente, se divide por 6 y se obtiene 8. ¿Cuál era el número?

#### Resolución:

Haremos un diagrama que indique las fases por las que pasó el número.





### Diagramas conjuntistas

Se suele recurrir a estos cuando se trata de información acerca de dos o más grupos cuyos elementos pueden pertenecer a más de un conjunto. También cuando se deben realizar clasificaciones. Los más conocidos son los diagramas de Venn y los de Carroll.

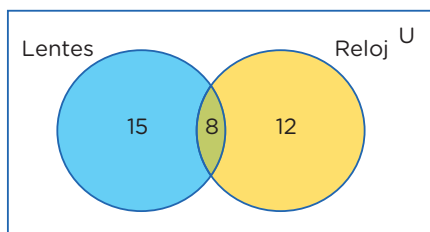
#### Ejemplo:

De los 35 estudiantes de un aula, 23 usan lentes y 20 reloj. ¿Cuántos usan ambas cosas?

#### Resolución:

Grupo 1: Estudiantes que usan lentes.

Grupo 2: Estudiantes que usan reloj.



### Diagramas cartesianos

Son de gran utilidad cuando se requiere representar funciones o si tenemos pares ordenados o relaciones entre dos variables.

#### Ejemplo:

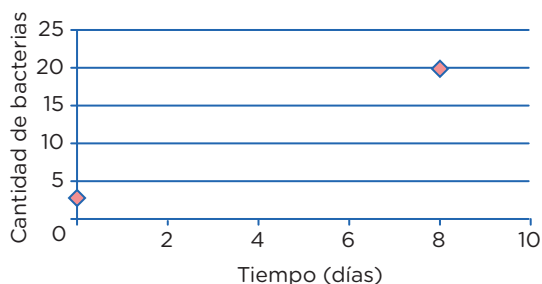
El crecimiento de un grupo de bacterias se da con el paso de los días de manera constante. Al inicio, había 3 bacterias, y después de 8 días llegan a 20. ¿Cuántos días transcurrirán desde el inicio para que la colonia tenga 400 bacterias?

#### Resolución:

Cantidad:

Organizaremos los datos en un gráfico cartesiano.

Pares ordenados: (0; 3) (8; 20)



### Diagramas lineales

Se usan cuando se cuenta con información acerca de una característica de un solo grupo. Generalmente se emplean para ordenar los elementos del grupo con respecto a esa característica.

#### Ejemplo:

Si tanto Roberto como Alfredo están más alegres que Tomás, mientras que Alberto se encuentra menos alegre que Roberto, pero más alegre que Alfredo, ¿quién está menos alegre?

#### Resolución:

Tomás, Ana, Lidia, Roberto.

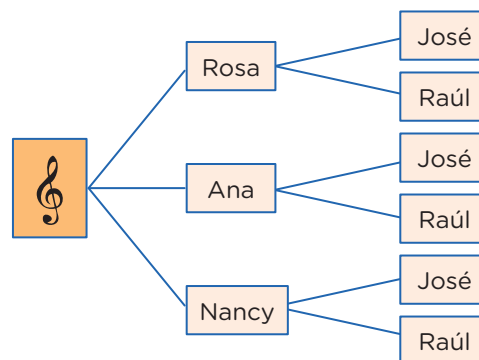


### Diagrama de árbol

Se suelen utilizar en conteos de casos posibles o para hacer listas sistemáticas. Es la representación gráfica de los principios de adición y multiplicación.

#### Ejemplo:

Un productor de cumbia quiere armar un dúo mixto (varón y mujer). Puede elegir entre 3 cantantes mujeres y 2 cantantes varones. ¿Cuántos dúos mixtos diferentes puede formar?



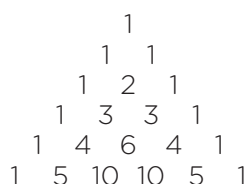
## 3. Otras estrategias

### Busca patrones

En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrán emplear para llegar a la solución.

#### Ejemplo:

El arreglo mostrado se conoce como el triángulo de Pascal.



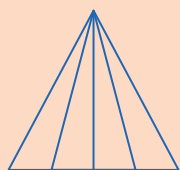
Escribe las tres filas siguientes de este arreglo. Como observas, cada fila empieza por uno. ¿Qué número sigue al 1 en la fila 75?, ¿cuál es la suma de los números que ocupan la fila número 20?, ¿puedes encontrar un patrón en las diagonales del triángulo de Pascal?

### Haz una lista sistemática

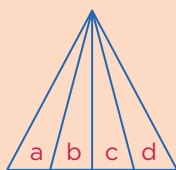
En los casos en que se requiere la enumeración de objetos matemáticos, es conveniente realizar un conteo o listado organizado, con el fin de no dejar de lado ninguna posibilidad. Esta estrategia es muy útil al buscar soluciones en una ecuación polinómica, para encontrar espacios muestrales o resolver problemas de permutaciones o combinaciones.

#### Ejemplo:

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Pongamos una etiqueta a cada uno de los cuatro triángulos en que se ha dividido el triángulo mayor.



#### Resolución:

- Contemos ahora los triángulos identificándolos por el número de letras:  
 Triángulos con una letra: a-b-c-d  
 Triángulos con dos letras: ab-bc-cd  
 Triángulos con tres letras: abc-bcd  
 Triángulos con cuatro letras: abcd
- En total tenemos:  $4 + 3 + 2 + 1 = 10$  triángulos.

#### Generaliza

En algunos problemas puede ser muy útil simbolizar las expresiones o averiguar si lo que piden se refiere a un caso particular de alguna propiedad general; a esto se conoce

como *la paradoja del inventor*. A veces, es conveniente investigar más de lo que piden.

#### Ejemplo:

Halla el valor de  $(234\ 756\ 474)^2 - (234\ 756\ 473)^2$ .

#### Solución:

Se observa que elevar al cuadrado cada número y luego realizar la resta sería demasiado laborioso, así que se trata de ver en la estructura del problema alguna particularidad. Lo primero que se observa es que consiste en una diferencia de cuadrados, lo que nos hace recordar las fórmulas algebraicas pertinentes. Además, se aprecia que los números son consecutivos.

- Al generalizar el problema, se observa que se solicita:

$$(n + 1)^2 - n^2, \text{ cuando } n \text{ vale } 234\ 756\ 473$$

- Factorizando por diferencia de cuadrados, se tiene:

$$(n + 1 + n)(n + 1 - n) = (n + 1) + n$$

- Luego, podemos afirmar que, para cualquier  $n$  entero positivo, se cumple:

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1) + n = 2n + 1$$

- Ahora el problema se ha simplificado bastante; para hallar la respuesta, solo basta duplicar el número dado y aumentarle 1.

Entonces:

$$(234\ 756\ 474)^2 - (234\ 756\ 473)^2 = 469\ 512\ 947$$

#### Particulariza

Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema; de este modo, es posible observar algún método que guíe hacia la solución de un problema genérico.

#### Ejemplo:

En una tienda de remates te ofrecen un descuento del 12 %, pero, al mismo tiempo, debes pagar el impuesto general a las ventas (18 %). ¿Qué preferirías que calculasen primero, el descuento o el impuesto?

#### Solución:

- Particularicemos para algunos casos: si el artículo vale  $S/100$  y elijo primero el descuento, termino pagando  $S/106$ . Pero, si elijo pagar el impuesto antes, entonces termino pagando la misma cantidad.



- Podemos probar con otros precios y obtener un resultado análogo. Esta experimentación me da pie para inferir que es lo mismo elegir primero el descuento o el impuesto.
- Ahora deberé evaluar mi conjetura.

### Razona lógicamente

El razonamiento lógico es muy importante al resolver problemas, pues gracias a él podemos engarzar los pasos y comprender las secuencias y cadenas de razonamientos que se producen en el desarrollo de su solución. Un ejemplo clásico es el siguiente acertijo.

#### Ejemplo:

José, Jaime, Tito y Rosa son guardias en un museo. Ellos hacen guardia cuatro días a la semana. Dos personas solamente hacen guardia cada día. Nadie hace tres días de guardia seguidos. ¿Cuál de los tres hombres no hace guardia con Rosa?

#### Solución:

Veamos una lista parcial que muestra los días de la semana en los que cada uno hace guardia:

Dom.	Lun.	Mar.	Miér.	Juev.	Vier.	Sáb.
José	Tito	Rosa	José	Jaime	Tito	Rosa
Jaime						

### Empieza por el final

La estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se utiliza mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final; también para demostrar desigualdades. La combinación de métodos progresivos y regresivos es una potente técnica para demostrar teoremas.

La utilización del razonamiento regresivo nos evitará tener que trabajar con ecuaciones complicadas.

#### Ejemplo:

El nivel del agua de un pozo desciende 3 cm por debajo de su mitad en cada hora, hasta quedar vacío luego de 4 horas. ¿Qué profundidad tenía el agua inicialmente?

#### Solución:

- “3 cm debajo de su mitad” se interpreta como  $\div 2, -3$ .
- Esto ocurre en cada hora y se repite 4 veces, ya que todo el suceso ocurre en 4 horas; de modo que al final el nivel es cero (0).
- Las operaciones directas serían así:  
 $x \rightarrow (\div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3) \rightarrow 0$
- Ahora, operando al revés, obtenemos:  $x = 90$

### Plantea una ecuación

Una de las técnicas de modelación por excelencia a nivel elemental es el planteo de ecuaciones. Lo primordial para poder aplicarla con éxito es el entrenamiento que se tenga en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. Es conveniente ponerse de acuerdo en cuanto a convenciones generales de redacción para no crear ambigüedades.

#### Ejemplo:

Dos velas de la misma longitud se encienden al mismo tiempo. La primera se consume en 4 horas y la segunda, en 3. ¿Cuánto tiempo pasa, después de haberse encendido, hasta que la primera vela tenga el doble de longitud que la segunda?

#### Solución:

- La primera vela se consume en su cuarta parte cada hora.
- La segunda se consume en su tercera parte cada hora.

Tiene que verificarse; por tanto:

$$L - (1/4)Lx = 2 [L - (1/3)Lx]; \text{ simplificando:}$$

$$1 - (1/4)x = 2 - (2/3)x; \text{ de donde } x = 2,4 \text{ horas}$$

- Es decir, pasan 2 horas 24 minutos.

### Establece submetas

Muchas veces, para llegar a la solución de un problema, se deben resolver problemas más pequeños. Es como escalar una gran montaña: se sabe que se debe llegar a alturas menores para conquistar la cima. De igual manera, para resolver un problema original, se necesita de un problema auxiliar que sirva de medio.





### Ejemplo:

Supongamos que la población actual del Perú es de 33 millones de habitantes y la tasa de crecimiento es de un 5 % anual. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población?



Fuente: Shutterstock

### Solución:

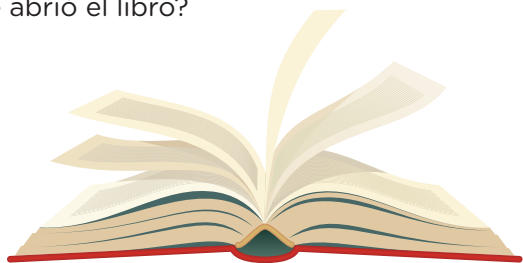
La primera meta es hallar una fórmula que modele el comportamiento de la población y, solo después de formada, se igualará a 66 millones. Si bien aquí la incógnita es el tiempo, se busca en su lugar la relación entre el tiempo y el número de habitantes.

### Utiliza el ensayo y error

Tantear es una estrategia muy útil cuando se hace de forma organizada y evaluando, cada vez, los ensayos que se realizan. En realidad, algunos métodos específicos de solución, como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas, se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.

### Ejemplo:

Un libro se abre al azar. El producto de las dos páginas observadas en ese momento es 3192. ¿Cuál es el número de las páginas en las que se abrió el libro?



Fuente: Shutterstock

### Solución:

- Primero se observa que  $50 \times 50 = 2500$ , número que no llega; y que  $60 \times 60 = 3600$ , el cual se pasa. Con esto observamos que los números están en el rango entre 50 y 60.
- $55 \times 56$  no puede ser, pues el producto termina en 0. Se quiere que termine en 2 y que los números sean consecutivos.
- Al probar  $53 \times 54 = 2862$ , el resultado no corresponde.
- Pero, al hacer la prueba con  $56 \times 57 = 3192$ , se observa que cumple con el resultado que plantea el problema.
- Entonces, las páginas que se observaron fueron la 56 y la 57.

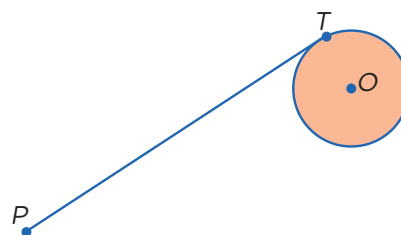
### Supón el problema resuelto

### Ejemplo:

Usando solo regla y compás, construye una tangente a una circunferencia dada, desde un punto exterior a ella.

### Solución:

Para resolver este problema, se supone que se debe hallar la tangente a una circunferencia, trazada desde un punto exterior a ella.



- El punto  $T$  es de tangencia. Entonces, ¿qué relación existe entre la tangente y algún elemento de la circunferencia? ¿Hay algún teorema que los relacione?
- Existe un teorema que nos dice que el radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.
- Por tanto, si unimos  $O$  con  $T$ , tendremos que  $OT$  es perpendicular a  $PT$ .
- Además, como tenemos tres puntos involucrados,  $P$ ,  $T$  y  $O$ , es posible hacer un triángulo uniendo el punto  $P$  con el punto  $O$ . Se observa que el triángulo es rectángulo.

## ¿Cómo los números racionales nos ayudan a realizar cálculos precisos?

### Construimos nuestros aprendizajes



#### Propósito

Establecemos relaciones entre datos y acciones referidas a comparar e igualar cantidades, y las transformamos en expresiones numéricas (modelos) que incluyen operaciones con expresiones fraccionarias o decimales. Asimismo, empleamos estrategias de cálculo y procedimientos diversos para realizar operaciones con números racionales.



#### Conocemos el planeta Marte

Desde el año 2000, varias son las misiones que han alcanzado Marte con éxito. Entre algunas de las más notables destacan Mars Odyssey (2001) y Mars Express (2003). En la actualidad, una de las más importantes es la misión Mars 2020, la cual puso en el planeta rojo al Róver Perseverance y a un pequeño helicóptero llamado Ingenuity.

Uno de los futuros objetivos de diversas agencias espaciales es enviar humanos a Marte para finales de la década de 2030 o principios de 2040.

La siguiente tabla muestra una comparación entre algunos datos encontrados sobre Marte y los que conocemos de la Tierra.



Fuente: Shutterstock

Fuente: National Geographic España (2023)

Datos básicos	Marte	Tierra
Tamaño: radio ecuatorial	3397 km	6378 km
Distancia media al Sol	227 940 000 km	149 600 000 km
Día: periodo de rotación sobre el eje	24,62 horas	23,93 horas
Año: órbita alrededor del Sol	686,98 días	365,256 días
Temperatura media superficial	-63 °C	15 °C
Gravedad superficial en el ecuador	3,72 m/s <sup>2</sup>	9,78 m/s <sup>2</sup>

Ricardo está preparando una exposición sobre las últimas misiones de exploración de Marte. Luego de recopilar la información, se plantea las siguientes preguntas:

- ¿Cuál de estos dos planetas tiene el diámetro ecuatorial más grande?
- ¿Qué medida tiene el perímetro ecuatorial de Marte con aproximación a las milésimas?
- ¿Cuánto mide el perímetro ecuatorial de la Tierra aproximado a las milésimas?
- ¿Cuál es la razón entre los perímetros ecuatoriales de la Tierra y Marte?











## Situación B: Tipo de cambio entre dólares

José, un joven andahuaylino becado por una empresa peruana, se preparó para ir a Canadá como estudiante de intercambio cultural durante tres meses. Él necesitaba cambiar dólares estadounidenses (USD) a dólares canadienses (CAD).

José se enteró de que el **tipo de cambio** entre el dólar estadounidense y el dólar canadiense era de  $1 \text{ USD} \equiv 1,25 \text{ CAD}$ . Entonces, cambió 2203 dólares estadounidenses a dólares canadienses con este tipo de cambio.

Al volver a Estados Unidos, tres meses después, a José le quedaban 358 dólares canadienses. Cuando los cambió a dólares estadounidenses, se dio cuenta de que el tipo de cambio había variado a  $1 \text{ CAD} \equiv 0,95 \text{ USD}$ .

- ¿Cuánto dinero recibió José en dólares estadounidenses?
- ¿Le favoreció que el tipo de cambio fuese de 1,05 CAD en lugar de 1,25 CAD cuando cambió los dólares canadienses que le quedaban por dólares estadounidenses? Da una explicación que justifique tu respuesta.

Adaptado de PISA 2003, 2005, págs. 39-40



### Glosario

El **tipo de cambio** es la relación entre el valor de una divisa y otra, es decir, nos indica cuántas monedas de una divisa se necesitan para obtener una unidad de otra. El tipo de cambio se determina por la oferta y demanda de cada divisa en el mercado de divisas.



### Ten en cuenta

Un factor de conversión de una divisa es el valor numérico o la proporción que se utiliza para relacionar una unidad de medida con otra. Por ejemplo:

$$1 \text{ USD} \equiv 1,25 \text{ CAD}$$

Aquí 1,25 es el factor de conversión.



### ¿Sabías que...?

El Pronabec otorga becas y créditos a peruanas y peruanos talentosos de escasos recursos económicos. Infórmate más en <https://www.gob.pe/pronabec>.

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

- Realizamos la conversión de monedas, de dólares canadienses a dólares estadounidenses:

$$1 \text{ CAD} \equiv 0,95 \text{ USD}; \text{ entonces: } 358 \times 0,95 = \boxed{\phantom{000}} \text{ USD}$$

**Respuesta a:** Por 358,00 CAD recibió  $\boxed{\phantom{000}}$  USD.

- Si el tipo de cambio se hubiera mantenido en  $1 \text{ USD} \equiv 1,25 \text{ CAD}$ , es decir,  $1 \text{ CAD} \equiv \frac{1}{1,25} \text{ USD} \equiv \boxed{\phantom{000}} \text{ USD}$ , entonces la cantidad de dólares estadounidenses que hubiera recibido por 358 dólares canadienses sería  $358 \times \boxed{\phantom{000}} = 286,40 \text{ USD}$ .

- Comparando ambas cantidades, tenemos:

$$\boxed{\phantom{000}} - 286,40 = 53,70 \text{ USD}$$

**Respuesta b:** Sí le favoreció a José, porque al disminuir el tipo de cambio recibió 53,70 dólares estadounidenses más por sus dólares canadienses.

**Ahora, respondemos las siguientes preguntas:**

- Describe el procedimiento realizado en la resolución de la situación.


- ¿De qué otra forma se puede dar respuesta a las preguntas de la situación?




## Aprendemos a partir del error

### Situación C: Tiempo de reacción

En una carrera de velocidad, el tiempo de reacción es el que transcurre entre el disparo de salida y el instante en que el atleta abandona el **taco de salida**. El tiempo final incluye tanto el tiempo de reacción como el tiempo de carrera.

Hasta la fecha, nadie ha sido capaz de reaccionar al disparo de salida en menos de 0,110 segundos. Si el tiempo de reacción registrado para un corredor es inferior a 0,110 segundos, se considera que se ha producido una salida falsa, pues el corredor tendría que haber salido antes de oír la señal.

En la tabla siguiente, figura el tiempo de reacción y el tiempo final de ocho atletas en una carrera de velocidad de 100 metros.

Corredor	Tiempo de reacción (s)	Tiempo final (s)
1	0,147	10,08
2	0,136	9,99
3	0,197	9,87
4	0,180	No acabó la carrera
5	0,210	10,17
6	0,216	10,04
7	0,174	10,09
8	0,193	10,13

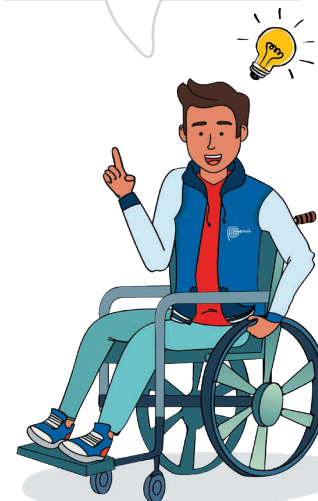
- a. Identifica a los atletas que ganaron las medallas de oro, plata y bronce en esta carrera. Completa la siguiente tabla con el número del corredor, su tiempo de reacción y su tiempo final.

Medalla	Corredor	Tiempo de reacción (s)	Tiempo final (s)
Oro			
Plata			
Bronce			

- b. Si el tiempo de reacción del corredor que ha ganado la medalla de bronce hubiera sido menor, ¿podría haber ganado la medalla de plata? Justifica tu respuesta.

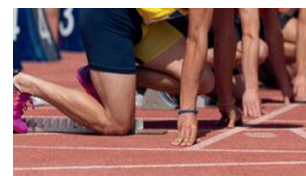
Tomado de INEE, 2013, págs. 1-2

Recordemos que en esta situación debemos revisar y analizar detenidamente la resolución para poder encontrar el error o los errores y proponer las respectivas correcciones.



### Glosario

Los **tacos de salida** (o *starting blocks*) son aquellos dispositivos utilizados en el atletismo por los atletas de velocidad para reforzar sus pies al comienzo de una carrera y que no resbalen mientras avanzan al sonido de la pistola del juez de salida.



Fuente: Shutterstock



## Evaluamos nuestros aprendizajes

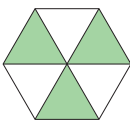


### Propósito

Expresamos con lenguaje numérico nuestra comprensión sobre las operaciones con números racionales. Establecemos relaciones entre datos y acciones referidas a expresiones decimales. Empleamos estrategias de cálculo y procedimientos diversos para realizar operaciones con números racionales.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Susana camina por un pasaje que mide 25,92 m de largo, de los cuales ya ha recorrido 8,75 m. Si en cada paso avanza 0,505 m, ¿cuántos pasos tendrá que dar para recorrer los metros que le faltan?
2. Un parque hexagonal está conformado por seis áreas con forma de triángulo equilátero, tal como se muestra en la figura. Las tres áreas no sombreadas se destinarán para juegos y las otras tres serán jardines. Si se sabe que el lado de cada triángulo equilátero mide 8,55 m, ¿cuál es el área total de los jardines?
 
3. Una empresa embotelladora lanza al mercado una bebida en presentaciones de  $\frac{1}{4}$  de litro,  $\frac{1}{2}$  litro, 1 litro,  $1\frac{1}{2}$  litros y 2 litros. Para acceder a los precios de introducción, la empresa pone como condición a sus clientes mayoristas un pedido mínimo de 1500 litros, despachada la tercera parte en envases de 2 litros y la mitad en envases de  $1\frac{1}{2}$  litros. El precio de venta de la nueva bebida, según los envases, se observa en el cuadro. Calcula lo que debe pagar una persona que compra 1500 litros de la nueva bebida, si el resto del pedido lo solicita en botellas de  $\frac{1}{4}$  de litro.
4. La capacidad de almacenamiento de los discos duros de las computadoras se mide en *gigabytes* (GB). Se sabe que una computadora tiene dos discos duros, uno de 286,33 GB y otro de 460,4 GB. ¿Cuál es la capacidad total de almacenamiento que tiene dicha computadora?
5. En la fábrica de lácteos El Granjero, se debe elegir un envase cilíndrico para la nueva presentación de su leche chocolatada. Las tres propuestas de envases con sus respectivas medidas se muestran en la siguiente tabla:

Propuesta	A	B	C
Radio	4,2 cm	3,5 cm	2,7 cm
Altura	5 cm	6 cm	9 cm

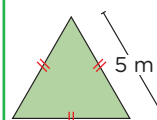
Se sabe que el envase elegido debe contener, aproximadamente, 225 mL. ¿Cuál de los envases propuestos es el que más se acerca al buscado para la leche chocolatada? (1 mL  $\equiv$  1 cm<sup>3</sup>)



### Recuerda

El área de un triángulo equilátero se puede expresar como  $A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$ , donde  $l$  es la medida del lado.

#### Ejemplo



$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} (5)^2$$

$$A = 12,5\sqrt{3} \text{ m}^2$$

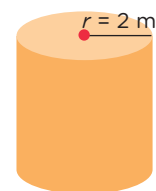
Envase	Precio
$\frac{1}{4}$ litro	S/0,50
$\frac{1}{2}$ litro	S/1,20
1 litro	S/2,00
$1\frac{1}{2}$ litros	S/2,50
2 litros	S/3,50



### Recuerda

$V_C = \pi \cdot r^2 \cdot h$   
 $V_C$ : volumen del cilindro  
 $r$ : radio  
 $h$ : altura

#### Ejemplo



$$V_C \approx 3,14 \times 2^2 \times 15 = 188,4 \text{ m}^3$$

6. Los estándares internacionales fijan los límites de tolerancia de las medidas de los neumáticos. En la siguiente tabla, se muestran los límites de tolerancia para el ancho y el diámetro de los neumáticos del tractor agrícola.

Ancho	Diámetro
-2 % hasta +4 %	-1 % hasta +1,5 %

Dados los límites anteriores, calcula el intervalo de tolerancia del ancho y del diámetro para el neumático que se muestra en la figura, cuyas medidas de fabricación son 443,00 mm de ancho y 1654,00 mm de diámetro.

- (a) Ancho: [442,98; 443,04]; diámetro: [1653,99; 1654,02]  
 (b) Ancho: [434,14; 460,72]; diámetro: [1637,46; 1678,81]  
 (c) Ancho: [441,00; 447,00]; diámetro: [1653,99; 1654,02]  
 (d) Ancho: [438,57; 443,40]; diámetro: [1653,00; 1655,50]



7. Dadas las siguientes afirmaciones, reconoce cuál es verdadera (V) o falsa (F), según corresponda.

I.  $\frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{9}{10\,000} = \frac{439}{1000}$  ( )

II. 20,3 se puede escribir como  $20\frac{3}{10}$  ( )

8. Una empresa alquila automóviles a sus clientes de acuerdo con dos planes. En el primero, puede alquilar uno en \$180 a la semana con kilometraje ilimitado; mientras que, en el segundo plan, alquila el mismo automóvil por \$120 a la semana más 25 centavos de dólar por cada kilómetro recorrido. Encuentra los valores de kilometraje semanal para los cuales es más barato alquilar un automóvil con el segundo plan.

## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Expresé con lenguaje numérico mi comprensión sobre las operaciones con números racionales.			
Establecí relaciones entre datos y acciones referidas a comparar e igualar expresiones fraccionarias o decimales.			
Empleé estrategias de cálculo y procedimientos diversos para realizar operaciones con números racionales.			
Planteé afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con números racionales.			



## ¿Cómo la progresión geométrica nos permite hacer predicciones?

### Construimos nuestros aprendizajes



#### Propósito

Expresamos con diversas representaciones nuestra comprensión sobre la regla de formación de una progresión geométrica para interpretar un problema. Seleccionamos procedimientos para determinar términos desconocidos en una progresión geométrica.



#### El juego de ajedrez

Cuenta una antigua leyenda que, estando en peligro la vida de un príncipe, acudió alguien en su ayuda. El príncipe, agradecido por tan sublime acto, le pidió a su salvador que le dijera qué quería como recompensa.

El salvador pensó un poco y luego hizo un pedido que el príncipe consideró muy simple y poca cosa. ¿Cuál era este pedido? Veamos.

Tomó un tablero de ajedrez y pidió que le colocaran un grano de trigo en la primera casilla, el doble en la segunda, el doble de lo anterior en la tercera, y así sucesivamente hasta la casilla número 64.

Lo que no sabía el príncipe era que la cantidad total de granos que pedía su salvador era realmente grande, ya que se trataba de miles de millones de granos, que podrían significar la cosecha en grandes extensiones de tierras, en todo el mundo, durante varios años.



Fuente: Freepik

Adaptado de la leyenda de Sissa, que explica el origen del juego de ajedrez

Luego de leer esta historia, Camila decidió calcular la cantidad de granos de trigo que pedía el salvador como recompensa. Previamente, se planteó las siguientes preguntas:

- La secuencia de números que se obtiene a partir de la cantidad de granos, ¿es una sucesión?, ¿por qué?
- ¿Cuántos granos de trigo debe entregar el príncipe por las casillas 16 y 20?
- ¿Cuántos granos de trigo, en total, debe entregar el príncipe a su salvador por las dos últimas casillas?

1	2	4	8	16	32	64	128



Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 2.



## Comprendemos el problema

- ¿Qué datos se presentan en la situación?


- ¿Cuántas casillas tiene el tablero de ajedrez?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- ¿Qué números de casillas ocupan las dos últimas posiciones del tablero?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- ¿Qué se pide determinar en la situación?


## Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

- Observa los números de la primera fila del tablero. ¿Estas cantidades aumentan o disminuyen? ¿Qué tienen en común estos números?


- ¿Cómo puedes predecir qué número continúa en la segunda fila?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- ¿Qué estrategia utilizarías para responder las preguntas de la situación? Explica.

- a) Buscar un patrón de formación
- b) Modificar el problema
- c) Razonar hacia atrás


- Observa la siguiente sucesión:

4; 12; 36; 108; 324; ...

Empleamos la estrategia heurística de buscar un patrón de formación:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...	$a_n$
↓	↓	↓	↓		
4	12	36	108	...	
$\times 3$	$\times 3$	$\times 3$	$\times 3$	...	



### Recuerda

#### Estrategia heurística: buscar patrones

En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrán emplear para llegar a la solución.

Encontrarás información sobre esta y otras estrategias heurísticas en las páginas 5-10.

Evaluamos los términos de la progresión geométrica (P. G.):

$$a_1 = 4 \times 1 = 4 \times 3^0$$

$$a_2 = 4 \times 3 = 4 \times 3^1$$

$$a_3 = 4 \times 9 = 4 \times 3^2$$

$$a_4 = 4 \times 27 = 4 \times 3^3$$

$$a_5 = 4 \times 81 = 4 \times 3^4$$

⋮

$$a_n = 4 \times 3^{n-1}$$

## Ejecutamos la estrategia o plan

Ahora, pongamos en marcha nuestro plan para responder las preguntas de la situación inicial:

9. Anota los números de la primera fila, busca un patrón de formación y responde.

		4			32		
--	--	---	--	--	----	--	--

- ¿Cómo se produce el incremento de un término a otro?


- ¿Cuál es el primer término?

$$a_1 = \boxed{\phantom{00}}$$

- ¿Cuál es la razón de la secuencia?

$$r = \boxed{\phantom{00}}$$

10. Según las respuestas de la actividad anterior, responde la primera pregunta de la situación.


11. Para obtener el segundo término de una sucesión, se multiplica el primer término por la razón; para el tercer término, se multiplica el primer término por la razón dos veces, y así sucesivamente. ¿Cómo se puede hallar el **término  $n$ -ésimo**? Explica.




## Formalización

### Progresión geométrica

Una progresión geométrica (P. G.) es una sucesión de números, tales que cada uno de ellos (excepto el primero) se obtiene multiplicando al anterior por un número llamado **razón** de la progresión.

En la progresión geométrica  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ , el valor del término  $n$ -ésimo ( $a_n$ ) es igual a

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

### Ejemplos

• 3; 9; 27; 81; ...  
 $\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$

• 10 000; 1000; 100; 10; ...  
 $\times \frac{1}{10} \quad \times \frac{1}{10} \quad \times \frac{1}{10}$

•  $\frac{1}{64}; -\frac{1}{32}; \frac{1}{16}; -\frac{1}{8}; \dots$   
 $\times (-2) \quad \times (-2) \quad \times (-2)$

• 729; 243; 81; 27; ...  
 $\times \frac{1}{3} \quad \times \frac{1}{3} \quad \times \frac{1}{3}$



## Glosario

El **término  $n$ -ésimo** es el término que ocupa la posición "n" en una sucesión.

Así, tenemos:

- $a_1$ : primer término
- $a_2$ : segundo término
- $a_3$ : tercer término
- ⋮
- $a_n$ :  $n$ -ésimo término





## Comprobamos nuestros aprendizajes



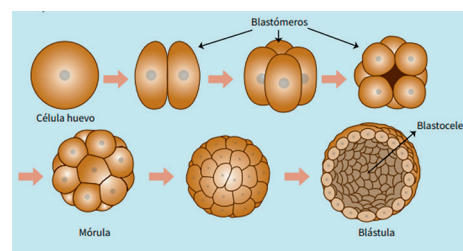
### Propósito

Establecemos relaciones entre magnitudes y las transformamos en expresiones algebraicas o gráficas que incluyen la regla de formación de una progresión geométrica. Planteamos afirmaciones sobre la relación entre la posición de un término y su regla de formación; asimismo, justificamos la validez de nuestras afirmaciones.



### Situación A: Crecimiento del número de células

En la fecundación de los seres vivos, al producirse la unión del óvulo y el espermatozoide, se forma un cigoto o huevo con 23 pares de cromosomas, los cuales llevan la información genética del padre y la madre. En un corto tiempo, esta célula se divide por bipartición en dos, cuatro, ocho, dieciséis, etc., células que llevan la misma información genética. Este nuevo ser recibe diversos nombres, como *mórula*, *blástula*, *gástrula*, *embrión*, y así sucesivamente.



A partir de lo descrito, se puede formar una progresión geométrica con el número de células (P. G.: 1; 2; 4; 8; ... ;  $a_n$ ; ...). Calcula el número de células que contiene la blástula después de la decimosegunda división.

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

- Se sabe que, después de la decimosegunda división, corresponde el término  $a_{13}$ .
- Por fórmula:

$$a_{13} = (1)(2)^{13-1} = (2)^{\boxed{\phantom{00}}} = \boxed{\phantom{00}}$$

**Respuesta:** La blástula, después de la decimosegunda división, tendrá  células con la misma información genética en sus cromosomas.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Qué procedimiento se utilizó para resolver la situación?
2. ¿Qué fórmula se utilizó para resolver la situación?
3. ¿Cómo se puede comprobar dicho resultado?
4. El cociente  $\frac{a_2}{a_1}$ , ¿es la razón de la progresión? Verifica con los demás términos.









## Recuerda

En una progresión geométrica, la razón es constante y se puede hallar dividiendo un término cualquiera entre su antecesor.

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

### Ejemplo

Determina la razón de las siguientes P. G.:

- a. -10; 50; -250; 1250; ...
- b. 0,2; 0,04; 0,008; ...
- c.  $2\sqrt{2}$ ;  $2\sqrt{6}$ ;  $6\sqrt{2}$ ; ...

### Resolución

- a.  $r = \frac{50}{-10} = -5$
- b.  $r = \frac{0,04}{0,2} = 0,2$
- c.  $r = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{3}$

## Situación B: Comisión en la venta de motos

Rubén firma un contrato como vendedor de motos en un concesionario. En este documento, se contempla pagarle una comisión por la venta de la primera moto y luego duplicarle la comisión anterior por cada moto adicional que venda. Si vende 9 motos y recibe S/12 775 de comisión total, ¿cuánto le pagaron de comisión por la cuarta moto que vendió?



Fuente: Freepik

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

- Comisión por la primera venta:  $x$
- Comisión por la segunda venta:  $2 \cdot x = 2x = 2^{2-1} \cdot x$
- Comisión por la tercera venta:  $2 \cdot (2x) = 2^2 \cdot x = 2^{3-1} \cdot x$
- Comisión por la cuarta venta:  $2 \cdot (2^2 \cdot x) = 2^3 \cdot x = \square \cdot x$
- Se obtiene esta P. G.:  $x; 2x; 2^2 \cdot x; 2^3 \cdot x; \dots$

Entonces, el término general es el siguiente:

$$a_n = 2^{n-1} \cdot x$$

Para calcular cuánto le pagaron de comisión por la cuarta moto, se necesita hallar el valor de  $x$ , es decir, la comisión que recibió por la venta de la primera moto.



## Ten en cuenta

El término  $n$ -ésimo de una P. G. está dado por esta expresión:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$a_1$ : primer término  
 $r$ : razón  
 $n$ : posición

### Ejemplo

Halla el término  $a_{10}$  de las siguientes P. G.:

- a. -10; 50; -250; 1250; ...
- b. 0,2; 0,04; 0,008; ...
- c.  $2\sqrt{2}$ ;  $2\sqrt{6}$ ;  $6\sqrt{2}$ ; ...

### Resolución

- a.  $a_{10} = (-10)(-5)^9 = 19\,531\,250$
- b.  $a_{10} = (0,2)(0,2)^9 = 1,024 \times 10^{-7}$
- c.  $a_{10} = (2\sqrt{2})(\sqrt{3})^9 = 162\sqrt{6}$



Dada la progresión geométrica  $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; \dots; a_n, \dots$ , podemos afirmar que la suma de sus  $n$  primeros términos se calcula así:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-1} + a_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Esta expresión se obtiene de la siguiente manera: multiplicamos ambos miembros de la primera igualdad anterior por  $r$ :

$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + r \cdot a_4 + r \cdot a_5 + \dots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$$

$$r \cdot S_n = \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + \cancel{a_5} + \dots + \cancel{a_n} + r \cdot a_n$$

$$(-) S_n = a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + \cancel{a_5} + \dots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n}$$

$$(r-1) \cdot S_n = r \cdot a_n - a_1$$

$$\underbrace{r \cdot r^{n-1} \cdot a_1}_{r \cdot r^{n-1} \cdot a_1 = a_1 \cdot r^n}$$

$$(r-1) \cdot S_n = a_1 \cdot r^n - a_1$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Luego, aplicamos la fórmula de la suma de términos:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow S_9 = \frac{a_1(2^9 - 1)}{2 - 1}$$







## Evaluamos nuestros aprendizajes



### Propósito

Expresamos con diversas representaciones la comprensión sobre la regla de formación de una progresión geométrica; seleccionamos procedimientos para determinar términos desconocidos y la suma de sus términos. Planteamos afirmaciones sobre la relación entre la posición de un término y su regla de formación. Justificamos nuestras afirmaciones.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

- Maritza es una jugadora de ajedrez que participó en las olimpiadas de su distrito. Ella recibió 1 punto por vencer a su primer contrincante, 2 puntos por el segundo, 4 por el tercero, y así sucesivamente. Si en el torneo venció a 16 de sus contrincantes, ¿cuántos puntos acumuló?  
 a) 1024     b) 256     c) 65 535     d) 16 384
- Halla la razón y determina cuál o cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas. Justifica tu respuesta.  
 I. 2; 4; 6; 8; 10; ...  
 II. 1; 3; 9; 27; 81; ...  
 III. 1; 1; 1; 1; 1; ...  
 IV. 1; 2; 1; 2; 1; ...  
 V. 2; -2; 2; -2; 2; ...  
 a) Solo II     b) II y III     c) I y II     d) II, III y V
- La profesora Marisol reta a sus estudiantes con la siguiente pregunta: si en una progresión geométrica el noveno término es igual a 5 y la razón es  $-\frac{1}{3}$ , ¿cuál es el sexto término?  
 a) -32 805     b) 135     c) -135     d) 328
- Durante sus primeros cuatro días de trabajo, Juan y Patricia venden 120 celulares cada uno. Juan vendió cada día  $\frac{1}{3}$  de lo que vendió el día anterior, y Patricia vendió cada día el doble del día anterior. ¿Cuántos celulares vendió cada uno en su primer día?
- El padre de Alejandra necesita comprar para su negocio un congelador que cuesta aproximadamente S/3000. Por ello, decide ahorrar cada mes  $\frac{2}{3}$  de lo ahorrado el mes anterior. Si el quinto mes ahorró S/160, ¿cuánto ahorró en total en los cinco meses? Y, si su ahorro no alcanzara, ¿cuánto dinero le falta? Justifica tu respuesta.



### Recuerda

El término  $n$ -ésimo de una progresión geométrica está dado por:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$a_1$ : primer término

$r$ : razón

$n$ : posición

#### Ejemplo

Halla el sexto término de la siguiente P. G.:  
0,3; 0,6; 1,2; ...

#### Resolución

$$a_1 = 0,3$$

$$r = \frac{0,6}{0,3} = 2$$

$$n = 6$$

Luego:

$$a_6 = (0,3)(2)^{6-1} = 9,6$$

La suma de los  $n$  primeros términos de una P. G. se calcula así:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

#### Ejemplo

Halla la suma de los seis primeros términos del ejemplo anterior.

#### Resolución

$$S_6 = \frac{(0,3)(2^6 - 1)}{2 - 1} = 18,9$$



6. A Carmen se le ha extraviado su perro y para encontrarlo envía mensajes de texto a tres amigas pidiéndoles que, a su vez, cada una envíe una copia a otras tres amigas, y así sucesivamente. Si todas cumplen con reenviar el mensaje, después de  $m$  envíos, ¿cuántas copias se habrán hecho del mismo mensaje?

- (a)  $3^m$  (c)  $\frac{3}{2}(1 - 3^{m-1})$   
 (b)  $3^{m+1}$  (d)  $\frac{3}{2}(3^m - 1)$



Fuente: buscomiperroperdido.com/

7. La población de una colonia de bacterias ha aumentado en progresión geométrica, de 59 049 bacterias el primer día a 236 196 el tercer día. ¿Cuál es la razón de crecimiento de la colonia por día?

- (a) 0,5 (b) 0,2 (c) 1,5 (d) 2

8. El profesor Santos y sus estudiantes se encuentran en el laboratorio de Física observando las oscilaciones de un péndulo. Él les pide que calculen el recorrido total de las oscilaciones del péndulo hasta el momento en que se detiene. Si en la primera oscilación recorre 16 cm y, a partir de la segunda,  $\frac{3}{4}$  de lo recorrido en la oscilación anterior, determina la regla de formación del recorrido en cada oscilación. Además, halla la distancia total que recorre el péndulo luego de 10 oscilaciones. Justifica tu respuesta.



Fuente: Shutterstock

## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Crterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Expresé con diversas representaciones mi comprensión sobre la regla de formación de una progresión geométrica (P. G.).			
Seleccioné y combiné procedimientos para determinar términos desconocidos y la suma de términos en una P. G.			
Planteé afirmaciones sobre la relación entre la posición de un término en una P. G. y su regla de formación.			
Justifiqué y comprobé la validez de mis respuestas.			

## ¿Cómo las transformaciones nos permiten crear nuevos diseños?

### Construimos nuestros aprendizajes



#### Propósito

Describimos las transformaciones de objetos mediante las ampliaciones, traslaciones, rotaciones o reflexiones. Asimismo, expresamos con dibujos y con lenguaje geométrico nuestra comprensión sobre las transformaciones geométricas aplicadas a una figura para interpretar un problema según su contexto.



#### Ordenamos la habitación

Teresa cambió la ubicación de los muebles de su dormitorio y resultó del siguiente modo:

Imagen inicial

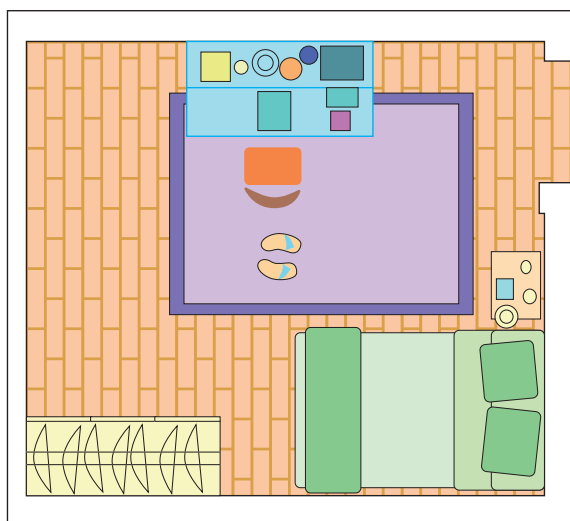
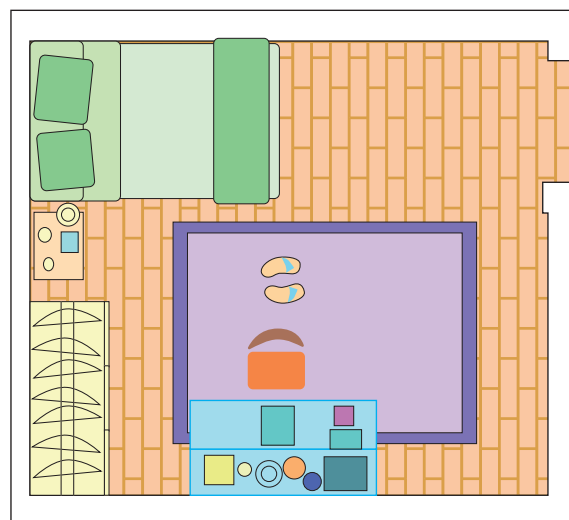


Imagen final



Luego de terminar la reubicación de sus muebles, Teresa no quedó conforme. ¿Puedes ayudarla a identificar qué movimientos se les realizó a la cama, el ropero, la cómoda y la alfombra? Justifica tu respuesta.







### ¿Sabías que...?

En 1986, la zona arqueológica de Chan Chan fue inscrita en la Lista del Patrimonio Mundial de la Unesco, en consideración a que es una obra de arte del genio creador humano.

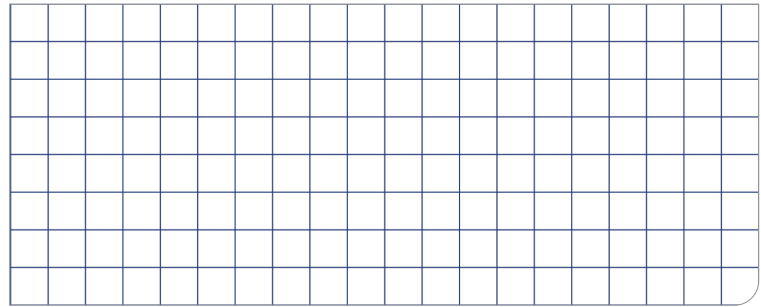
La ciudadela de Chan Chan se ubica en el Valle de Moche, en la ciudad de Trujillo. Uno de los detalles más admirados es la cantidad de muros decorados con altos relieves, los cuales presentan diversas transformaciones geométricas.

Infórmate más en <https://chanchan.gob.pe/>



Fuente: Shutterstock

10. Describe la alfombra de la imagen inicial y la de la imagen final: dibuja y determina la transformación geométrica aplicada.

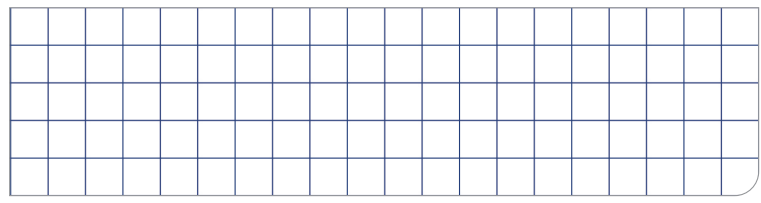


### Reflexionamos sobre el desarrollo

11. ¿Te fue útil realizar esquemas de la posición de cada objeto para identificar la transformación geométrica aplicada?



12. Imagina que a uno de los objetos de la habitación se le aplica una rotación de  $180^\circ$  en sentido horario. ¿Es correcto decir que este movimiento se puede obtener aplicando una reflexión sobre el objeto? Haz un dibujo y justifica tu respuesta.

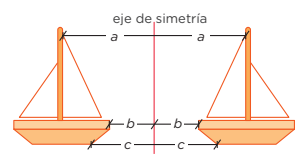


### Formalización

#### Simetría axial

El resultado de la simetría axial es otra figura del mismo tamaño, pero que ha cambiado su orientación (la derecha se convierte en izquierda y viceversa):

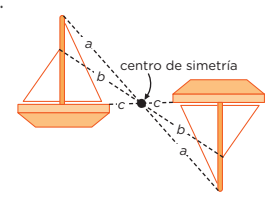
- Los puntos correspondientes de ambas figuras están a la misma distancia del eje de simetría y en direcciones opuestas.
- La línea que une un punto de la figura con su respectivo punto reflejado es perpendicular al eje de simetría.
- La figura reflejada siempre tiene el mismo tamaño, pero en la dirección opuesta que la original.



#### Simetría central

El resultado de la simetría central es otra figura del mismo tamaño, pero que ha cambiado su orientación y está invertida:

- Todas las líneas que unen un punto de la figura con su respectivo punto reflejado pasan por el centro de simetría.
- Los puntos correspondientes de ambas figuras están a la misma distancia del centro de simetría y en direcciones opuestas.
- Una simetría central equivale a una rotación de  $180^\circ$  con respecto a un punto.









## Formalización

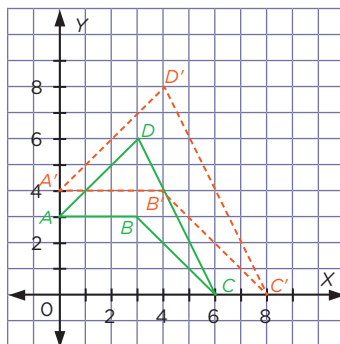
Una **homotecia** de centro  $O$  y razón  $k$ , denotada con  $H(O; k)$ , es la transformación que hace corresponder a cada punto  $P$  otro punto  $P'$ , alineado con  $O$  y  $P$ , de forma que  $OP' = k \cdot OP$ .

- Si  $0 < k < 1$ , la figura homotética es de menor tamaño que la original.
- Si  $k = 1$ , la figura homotética es congruente a la original.
- Si  $k > 1$ , la figura homotética es de mayor tamaño que la original.

En una homotecia se conserva la forma; además, las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales.

### Ejemplo

El gráfico muestra la homotecia  $H(O; \frac{4}{3})$  del cuadrilátero  $ABCD$  de coordenadas  $A(0; 3)$ ,  $B(3; 3)$ ,  $C(6; 0)$  y  $D(3; 6)$ .



Los vértices del cuadrilátero obtenido serán:

$$A' = \frac{4}{3}(0; 3) = (0; 4)$$

$$B' = \frac{4}{3}(3; 3) = (4; 4)$$

$$C' = \frac{4}{3}(6; 0) = (8; 0)$$

$$D' = \frac{4}{3}(3; 6) = (4; 8)$$

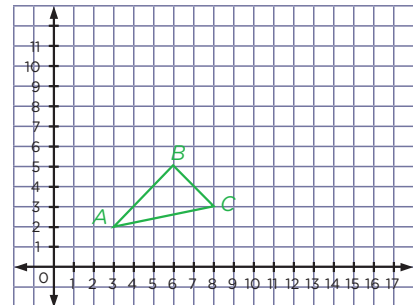
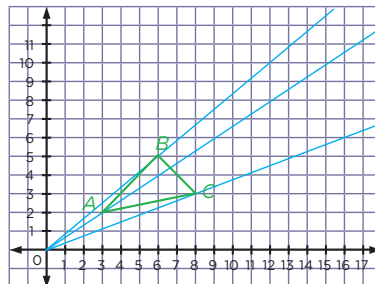
## Situación B: Graficamos una homotecia

El profesor Martín les pide a sus estudiantes que grafiquen la homotecia, con centro en el origen de coordenadas y razón igual a 2, de un triángulo de vértices  $A(3; 2)$ ,  $B(6; 5)$  y  $C(8; 3)$ . ¿Cuáles serán los vértices del triángulo obtenido?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

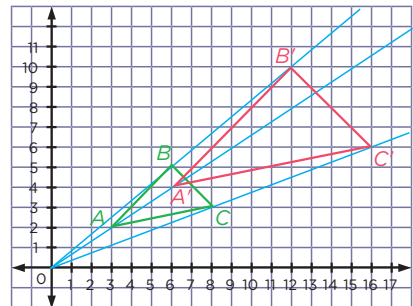
### Resolución

- Graficamos un diagrama cartesiano.
- Trazamos el triángulo en el plano cartesiano a partir de sus vértices  $A(3; 2)$ ,  $B(6; 5)$  y  $C(8; 3)$ .



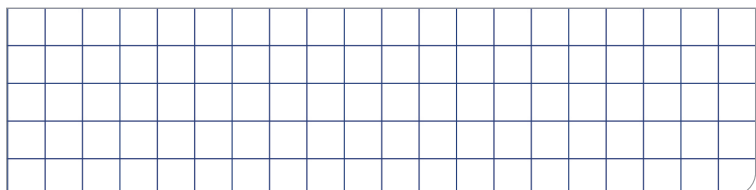
- Desde el centro de homotecia (origen de coordenadas), trazamos rectas proyectadas hacia cada vértice del triángulo.

- Luego, como  $k = 2$ , duplicamos la distancia que hay entre el centro de homotecia y cada vértice para obtener el nuevo triángulo.
- Calculamos los vértices del nuevo triángulo:  
 $A' = 2 \times A(3; 2) = (6; 4)$   
 $B' = 2 \times B(6; 5) = (12; 10)$   
 $C' = 2 \times C(8; 3) = (16; 6)$



Ahora, respondemos la siguiente pregunta:

1. Compara los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$ : describe qué propiedades comunes tienen y qué propiedades los diferencian.







## Evaluamos nuestros aprendizajes

### Propósito

Describimos las transformaciones de objetos mediante las traslaciones, rotaciones o reflexiones. Representamos con dibujos y con lenguaje geométrico las transformaciones geométricas; asimismo, empleamos estrategias o procedimientos para describirlas. Justificamos las relaciones entre formas geométricas.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

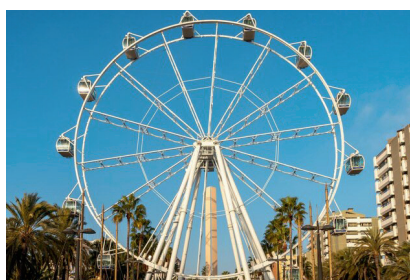
1. Cuando una persona está frente a un espejo, ¿qué transformación se observa?



Fuente: Shutterstock

- a) Rotación
- b) Traslación
- c) Simetría central
- d) Simetría axial

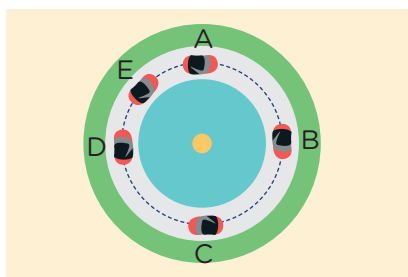
2. ¿Qué tipo de transformación se visualiza en la imagen del juego mecánico?



Fuente: Freepik

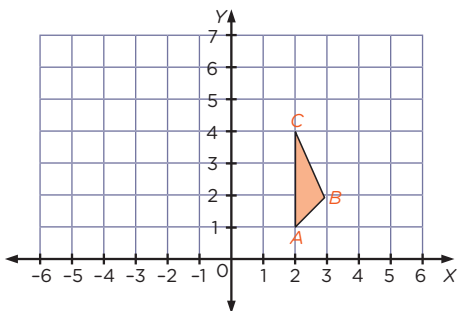
- a) Rotación
- b) Traslación
- c) Simetría axial
- d) Simetría central

3. En la figura, cuando el auto va del punto A al punto C, es incorrecto decir que hubo:

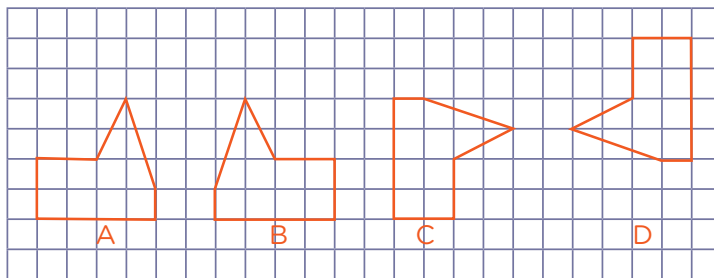


- a) rotación
- b) simetría central
- c) homotecia
- d) traslación

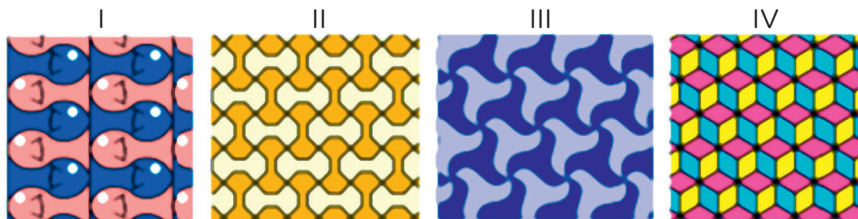
4. Al triángulo  $ABC$  se le aplica una homotecia con centro en el origen y razón  $k = 3$ . ¿Cuáles son las coordenadas del triángulo formado después de la homotecia?



5. Se podría afirmar que la homotecia de una figura con  $k = -1$  y centro en el origen de coordenadas es similar a:
- a) una simetría axial con respecto a una recta que pasa por el origen de coordenadas.
  - b) una simetría central con centro en el origen.
  - c) una rotación con ángulo de  $180^\circ$  respecto al origen.
  - d) b y c
6. Observa las figuras A, B, C y D. ¿Qué relación existe entre ellas?



- a) Simetría central, rotación, simetría axial
  - b) Simetría axial, traslación, rotación
  - c) Simetría axial, rotación, simetría central
  - d) Simetría central, traslación, simetría axial
7. ¿En cuál de las siguientes figuras existe simetría central?



- a) I
- b) II
- c) III
- d) IV



8. Realizar una ampliación del 80 % en una fotocopidora es como aplicar una homotecia con centro en una de las esquinas de la hoja y con una razón igual a:



Fuente: Shutterstock

a)  $\frac{4}{5}$

b)  $\frac{5}{4}$

c)  $\frac{9}{5}$

d)  $\frac{5}{9}$

## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Describí las transformaciones de objetos mediante la combinación de ampliaciones, traslaciones, rotaciones o reflexiones.			
Representé con dibujos y con lenguaje geométrico mi comprensión sobre las transformaciones geométricas de formas bidimensionales.			
Empleé estrategias, recursos o procedimientos para describir transformaciones geométricas.			
Justifiqué con mis conocimientos geométricos las diversas transformaciones geométricas.			

## ¿Cómo las medidas de dispersión nos ayudan a tomar decisiones?

### Construimos nuestros aprendizajes



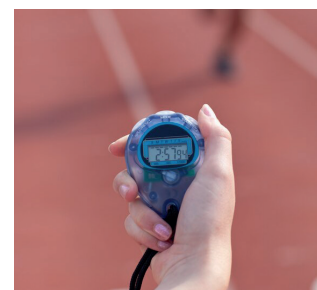
#### Propósito

Representamos las características de una muestra de la población en estudio mediante variables cuantitativas, así como el comportamiento de los datos por medio de gráficos de barras, medidas de tendencia central o desviación estándar. Además, leemos tablas y gráficos de barras para deducir, interpretar y producir nueva información.



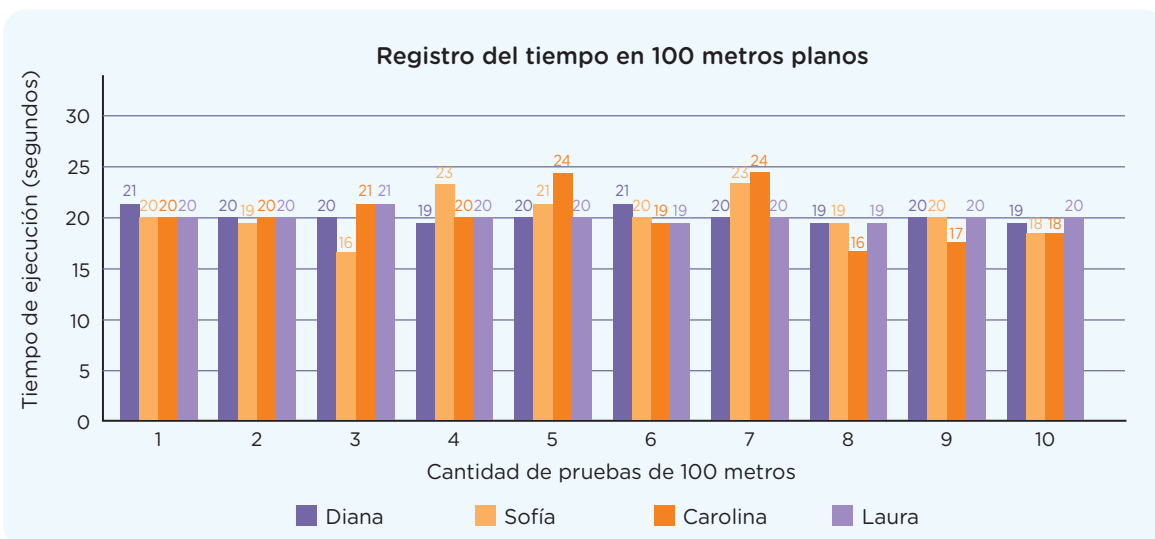
#### Elegimos a las mejores atletas

La entrenadora del colegio Todos Unidos debe escoger a dos de sus cuatro mejores atletas para los Juegos Deportivos Escolares Nacionales. Para ello, les pone 10 pruebas de 100 metros planos a cada atleta y pide a su asistente que registre los tiempos para luego tomar una decisión.



Fuente: Freepik

El registro se muestra en el siguiente gráfico de barras:



- A partir de los datos del gráfico, ¿cómo deberá proceder la entrenadora para tomar su decisión?
- Además de las medidas de tendencia central, ¿qué otras medidas se podrían considerar, tomando en cuenta los datos anteriores, para elegir a las dos mejores atletas?





8. ¿Qué conocimientos matemáticos se necesitan para poder dar respuesta a las preguntas planteadas?


### Ejecutamos la estrategia o plan

9. Organiza los tiempos de cada atleta en la tabla y luego aplica la fórmula para calcular la media o el promedio para datos no agrupados.

Atletas	Tiempo empleado en las 10 pruebas de atletismo de 100 m planos																						
Diana																							
Sofía																							
Carolina																							
Laura																							


10. Observando los promedios de cada atleta, ¿podrá la entrenadora elegir a las dos mejores?, ¿por qué?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

11. ¿Qué otras medidas de tendencia central debería calcular la entrenadora para elegir a las dos atletas?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

12. Calcula la mediana y la moda de los tiempos de cada atleta, con la finalidad de contar con más información para la toma de decisiones.

Medidas de tendencia central	Media ( $\bar{x}$ )	Mediana (Me)	Moda (Mo)
Atletas			
Diana			
Sofía			
Carolina			
Laura			




### Glosario

Las **medidas de tendencia central** son valores representativos de un conjunto de datos o de una población o muestra. Las más utilizadas son la media, la mediana y la moda.



### Formalización

La **media** ( $\bar{x}$ ) para datos no agrupados es igual a la suma de los datos dividida entre el número total de datos.

#### Ejemplo

Adela obtuvo las siguientes calificaciones: 16; 13; 14; 16; 16; 20; 13; 16. Entonces:

$$\bar{x} = \frac{16+13+14+16+16+20+13+16}{8}$$
$$\bar{x} = 15,5$$

La **mediana** (Me) es el dato central de un conjunto de datos ordenados.

En el ejemplo anterior, primero ordenamos las calificaciones: 13; 13; 14; 16; 16; 16; 16; 20

Como la cantidad de datos es par, la mediana es igual a la semisuma de las cantidades que ocupan los dos lugares centrales.

$$Me = \frac{16+16}{2} = 16$$

La **moda** (Mo) es el valor de la variable que más veces se repite.

Luego, en el ejemplo: 16; 13; 14; 16; 16; 20; 13; 16  
Mo = 16



## Glosario

El **rango** o recorrido ( $R$ ) es la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable.

$$R = V_{\max} - V_{\min}$$

Cuando el recorrido de un conjunto de datos es menor, decimos que los datos son más homogéneos.

13. De acuerdo con la información anterior, ¿a quiénes elegirá la entrenadora?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

14. Quienes tienen menor **rango** son aquellas cuyos tiempos no están muy dispersos. En este sentido (y dado que las medidas de tendencia central no son suficientes para tomar una decisión), halla el rango de los tiempos.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

15. Luego de obtener los rangos, ¿a quiénes elegirá la entrenadora para asegurar que, efectivamente, el promedio se acerque al esperado?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## Reflexionamos sobre el desarrollo

16. ¿Por qué no es conveniente elegir a quienes tienen mayor rango? Explica.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

17. ¿Por qué ni la mediana ni la moda ayudaron a tomar la decisión? Explica.


18. ¿Puedes utilizar el mismo procedimiento para resolver algún otro problema? Da un ejemplo.




## Recuerda

Para cada intervalo de una tabla de distribución de frecuencias agrupadas, la marca de clase ( $X_i$ ) se calcula con la semisuma de sus valores extremos. Además, la amplitud de un intervalo de clase ( $A$ ) es igual a la diferencia entre sus valores extremos. Por ejemplo:

Edad (años)	$X_i$	$f_i$	$F_i$
[38; 44[	41	8	8
[44; 50[	47	9	17
[50; 56[	53	12	29
[56; 62]	59	10	39
<b>Total</b>		39	

$$X_1 = \frac{38 + 44}{2} = 41$$

$$A = 44 - 38 = 6$$



Cuando los valores de la variable son muchos, es conveniente agrupar estos datos en intervalos de clase, en una tabla de distribución de frecuencias agrupadas, para poder realizar un mejor análisis e interpretación de la información.





## Situación B: Midiendo las pulsaciones en estudiantes

Como parte de un programa del Ministerio de Salud, se realiza la medida de las pulsaciones cardiacas por minuto de un grupo de 40 estudiantes de tercer grado de secundaria.

66	81	76	89	91	67	82	93	60	64
76	60	83	94	61	98	79	88	92	66
76	64	74	85	81	100	77	93	81	86
97	63	82	71	84	63	78	79	96	62

- Elabora una tabla de frecuencias, agrupando los resultados de las pulsaciones en ocho intervalos.
- Halla la media de las pulsaciones cardiacas del grupo de estudiantes.
- Grafica el histograma de frecuencia absoluta y ubica gráficamente la moda.



### Recuerda

La **frecuencia absoluta** ( $f_i$ ) es el número de veces que aparece cada variable.  
La **frecuencia absoluta acumulada** ( $F_i$ ) es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores iguales o inferiores al valor estudiado.

Por ejemplo:

$$F_1 = f_1 = 8$$

$$F_2 = f_1 + f_2 = 8 + 3 = 11$$

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

- Completamos la tabla de frecuencias:

N.º de pulsaciones [ $L_i$ ; $L_s$ ]	$X_i$	Conteo	$f_i$	$F_i$	$X_i \cdot f_i$
[60; 65[	62,50	IIII III	8	8	500,0
[65; 70[	67,50	III	3	11	202,5
[70; 75[	72,50	II	2	13	145,0
[75; 80[	77,50	IIII II	7	20	542,5
[80; 85[	82,50	IIII II			
[85; 90[	87,50	IIII			
[90; 95[	92,50	IIII			
[95; 100]	97,50	IIII		40	
<b>Total</b>			40		3170,0

- Hallamos la media de las pulsaciones, tomando los datos necesarios de la tabla de frecuencias.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i \cdot f_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^8 X_i \cdot f_i}{40}$$

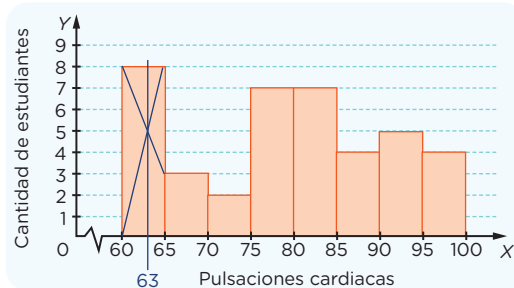
$k$ : número de intervalos de la distribución

$$\bar{x} = \frac{500 + 202,5 + 145,0 + 542,5 + \boxed{\phantom{000}} + \boxed{\phantom{000}} + \boxed{\phantom{000}} + \boxed{\phantom{000}}}{40}$$

$$\bar{x} = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{40} = 79,25 \text{ pulsaciones}$$

Por lo tanto, la media de las pulsaciones del grupo de estudiantes es 79,25.

- Elaboramos el histograma y ubicamos la moda en la gráfica:



Por lo tanto, la moda es aproximadamente 63 pulsaciones por minuto.



### Ten en cuenta

Sean  $X_1; X_2; X_3; \dots; X_k$  las marcas de clase de los  $k$  intervalos de una distribución; además, sean  $f_1; f_2; f_3; f_4; \dots; f_k$  las frecuencias absolutas de todos los intervalos, respectivamente. Entonces, la media aritmética se define como

$$\bar{x} = \frac{X_1 \cdot f_1 + X_2 \cdot f_2 + X_3 \cdot f_3 + \dots + X_k \cdot f_k}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i \cdot f_i}{n}$$

Para calcular la moda en el gráfico, procedemos de la siguiente manera: en la barra de mayor frecuencia, trazamos segmentos en aspa que vayan desde los vértices superiores de la barra hacia los vértices contiguos. Luego, se traza una línea paralela al eje Y que pase por la intersección de los segmentos trazados anteriormente; así, encontramos el valor aproximado de la moda, tal como se aprecia en el gráfico.

## Aprendemos a partir del error

### Situación C: Dispersión de las pulsaciones de los estudiantes

A partir de la información anterior, calcula la varianza y la desviación estándar de las pulsaciones del grupo de estudiantes.

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

### Resolución

Calculemos las medidas de dispersión solicitadas:

- Primero, hallamos la varianza.

La varianza ( $V$ ) para datos agrupados es la media de los cuadrados de las diferencias entre el promedio y cada dato. Se calcula con la siguiente fórmula:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \cdot (\bar{x} - X_i)^2}{n}$$

Donde:

$f_i$ : frecuencia absoluta

$\bar{x}$ : media aritmética o promedio;  $\bar{x} = 79,25$

$X_i$ : marca de clase

$n$ : número de datos

Consideramos la tabla de la situación y completamos los datos que se necesitan.

$[L_i; L_s]$	$X_i$	$f_i$	$\bar{x} - X_i$	$(\bar{x} - X_i)^2$
[60; 65[	62,50	8	79,25 - 62,5 = 16,75	(16,75) <sup>2</sup> = 280,5625
[65; 70[	67,50	3	11,75	138,0625
[70; 75[	72,50	2	6,75	45,5625
[75; 80[	77,50	7	1,75	3,0625
[80; 85[	82,50	7	-3,25	10,5625
[85; 90[	87,50	4	-8,25	68,0625
[90; 95[	92,50	5	-13,25	175,5625
[95; 100]	97,50	4	-18,25	333,0625
<b>Total</b>		40		

Reemplazamos en la fórmula:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^8 f_i \cdot (\bar{x} - X_i)^2}{n} = \frac{1054,5}{40} = 26,3625$$

- Ahora calculamos la desviación estándar ( $s$ ).

La desviación estándar ( $s$ ) es la raíz cuadrada de la varianza:  $s = \sqrt{V}$

$$s = \sqrt{26,3625} \approx 5,13$$



### Ten en cuenta

Las medidas de dispersión nos indican si los datos están muy alejados de la media o si son muy cercanos a ella. Cuanto mayor sea su valor, mayor será la variabilidad; cuanto menor sea, más homogénea será la distribución de los datos respecto a la media. Las medidas de dispersión son el rango ( $R$ ), la desviación media ( $DM$ ), la desviación estándar ( $s$ ), la varianza ( $V$ ) y el coeficiente de variación ( $CV$ ).



### Recuerda

Los intervalos se forman teniendo en cuenta que el límite inferior de una clase pertenece al intervalo, pero el límite superior no pertenece a él (excepto en el último intervalo). El límite superior se cuenta en el siguiente intervalo. Así, tenemos:

$[L_i; L_s[$

$L_i$ : límite inferior

$L_s$ : límite superior

#### Ejemplo

Para el intervalo [60; 65[:

$L_i = 60$

$L_s = 65$



Calculamos el porcentaje de desviación:  $\frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \%$

$$\frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \% \approx \frac{5,13}{79,25} \times 100 \% \approx 6,47 \%$$

Por lo tanto, se concluye que los datos no están dispersos.

**Ahora, respondemos la pregunta para corregir el error:**

1. Revisa el procedimiento realizado. En caso de que hubiera un error, corrígelo.
  - Consideramos la tabla de la situación y completamos los datos que se necesitan.

La desviación estándar ( $s$ ) expresa el grado de dispersión de los datos con respecto a la media aritmética ( $\bar{x}$ ) de la distribución.  
 A menor desviación estándar, mayor concentración hacia el promedio.  
 Un porcentaje de desviación menor al 20 % indica poca dispersión y medidas de tendencia central significativas.



$[L_i; L_s]$	$X_i$	$f_i$	$\bar{x} - X_i$	$(\bar{x} - X_i)^2$	$f_i \cdot (\bar{x} - X_i)^2$
[60; 65[	62,50	8	16,75	280,5625	
[65; 70[	67,50	3	11,75	138,0625	
[70; 75[	72,50	2	6,75	45,5625	
[75; 80[	77,50	7	1,75	3,0625	
[80; 85[	82,50	7	-3,25	10,5625	
[85; 90[	87,50	4	-8,25	68,0625	
[90; 95[	92,50	5	-13,25	175,5625	
[95; 100]	97,50	4	-18,25	333,0625	
<b>Total</b>		40			

Reemplazamos en la fórmula:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \cdot (\bar{x} - X_i)^2}{n} = \frac{\boxed{\phantom{000000}}}{\boxed{\phantom{000000}}} = \boxed{\phantom{000000}}$$

- Luego, la desviación estándar y el porcentaje de desviación serán:

$$s = \sqrt{\boxed{\phantom{000000}}} \approx \boxed{\phantom{000000}}$$

$$\frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \% \approx \frac{\boxed{\phantom{000000}}}{\boxed{\phantom{000000}}} \times 100 \% \approx \boxed{\phantom{000000}} \%$$



## Evaluamos nuestros aprendizajes

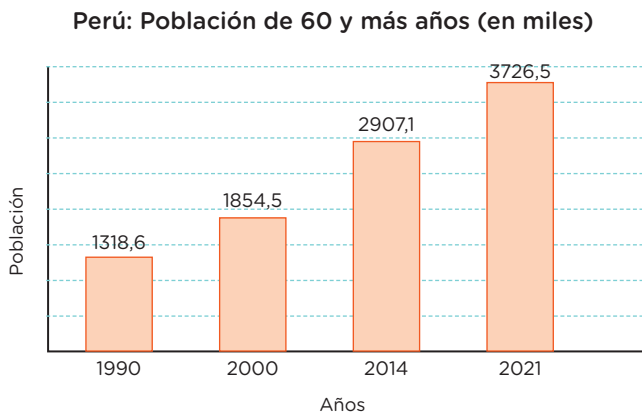
### Propósito

Representamos las características de la muestra de una población en estudio mediante variables cuantitativas. Leemos tablas, gráficos de barras y otros que contengan valores sobre medidas estadísticas y de tendencia central. Empleamos procedimientos para determinar la media, el rango, la varianza y la desviación estándar.



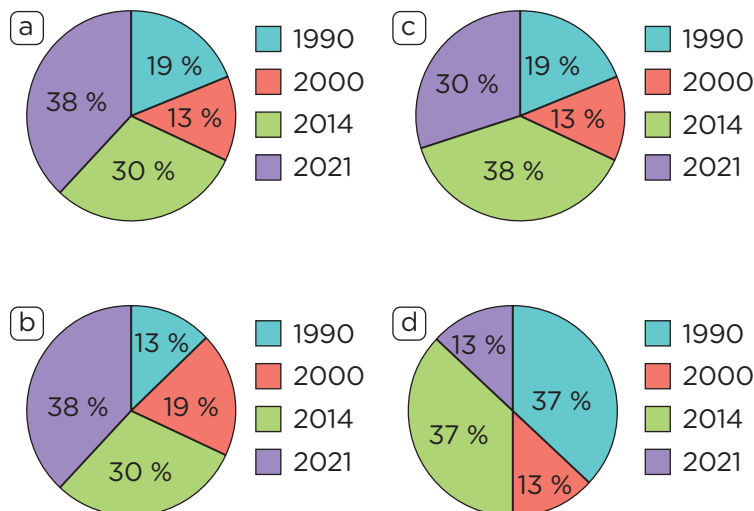
Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. El siguiente gráfico muestra el estado de la población adulta mayor en ciertos años entre 1990 y 2021.



Fuente: Instituto Nacional de Estadística e Informática

¿Cuál de los siguientes gráficos circulares corresponde al estado de la población adulta mayor?



### Recuerda

Los gráficos circulares se utilizan generalmente cuando se quiere destacar la frecuencia porcentual de variables cualitativas o cuantitativas.

#### Ejemplo

La tabla muestra las preferencias de 20 estudiantes.

Mascota	$f_i$	$h_i$	$h_i\%$
Perro	90	0,45	45 %
Gato	50	0,25	25 %
Hámster	36	0,18	18 %
Otros	24	0,12	12 %
<b>Total</b>	$n = 200$		

$$\text{Donde } h_i = \frac{f_i}{n}$$

Al 100 % de los estudiantes le corresponde el ángulo de  $360^\circ$ . Luego:

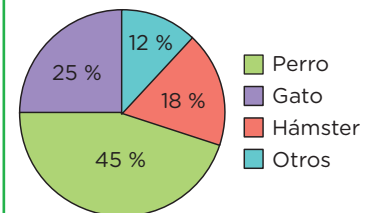
$$12\% \rightarrow 0,12 \times 360^\circ = 43,2^\circ$$

$$18\% \rightarrow 0,18 \times 360^\circ = 64,8^\circ$$

$$25\% \rightarrow 0,25 \times 360^\circ = 90^\circ$$

$$45\% \rightarrow 0,45 \times 360^\circ = 162^\circ$$

#### Mascota favorita de 200 estudiantes







## Ten en cuenta

### Cálculo de la moda (Mo)

La moda es el valor de la variable con mayor frecuencia. Para calcular la moda en el caso de datos agrupados, se deben conocer los límites del intervalo modal (intervalo con la mayor frecuencia), la amplitud y la frecuencia de cada intervalo.

$$Mo = L_i + \left( \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) \cdot A$$

$L_i$ : límite inferior

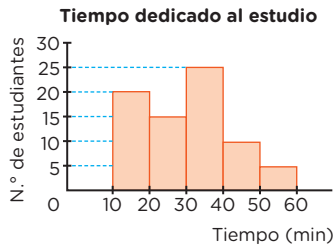
$A$ : amplitud del intervalo

$$\Delta_1: f_i - f_{i-1}$$

$$\Delta_2: f_i - f_{i+1}$$

### Ejemplo

Dado el histograma, calcula el valor de la moda.



El intervalo con mayor frecuencia es [30; 40[.

$$L_i = 30$$

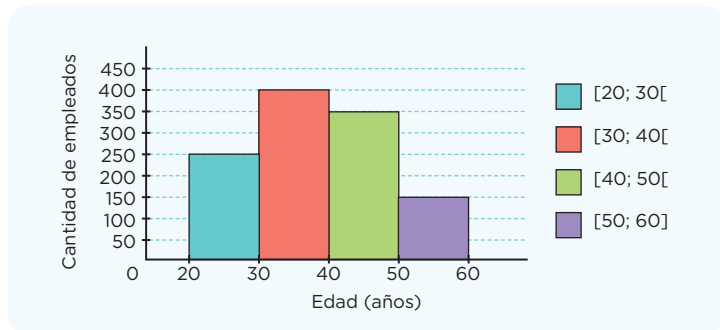
$$A = L_s - L_i = 40 - 30 = 10$$

$$\Delta_1: f_i - f_{i-1} = 25 - 15 = 10$$

$$\Delta_2: f_i - f_{i+1} = 25 - 10 = 15$$

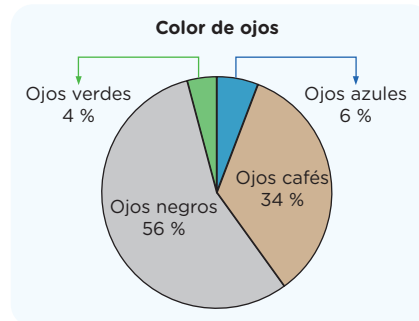
$$Mo = 30 + \left( \frac{10}{10 + 15} \right) (10) = 34$$

2. Según el gráfico mostrado, ¿cuál es la moda aproximada?



- a) 37,5 años                      c) 40 años  
b) 35 años                        d) 30 años

3. El siguiente gráfico circular muestra el color de ojos de 200 personas.



Respecto al gráfico, se afirma lo siguiente:

- I. Hay 20 personas que tienen ojos verdes o azules.
- II. 112 personas tienen ojos de color negro.
- III. 180 personas tienen ojos de color negro o café.

¿Qué afirmaciones son correctas?

- a) Solo I                              c) I y III  
b) I y II                                d) I, II y III

4. Se realizó una encuesta sobre la preferencia de comidas típicas de los estudiantes de tercer grado de secundaria. Se tomó una muestra de 80 estudiantes (10 de cada sección) y los resultados fueron los siguientes:

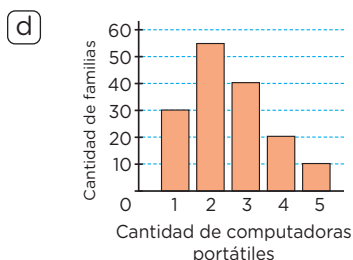
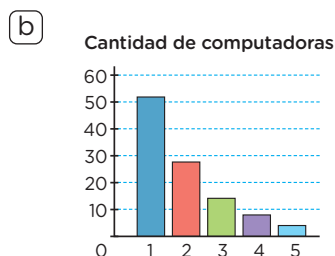
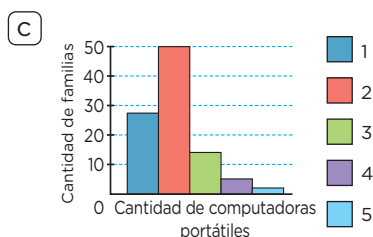


Fuente: Freepik

a 22 les gusta el cebiche; a 18, el ají de gallina; a 12, la carapulcra; a 10, el lomo saltado; a 6, el arroz con pato; y a 12, la chanfainita.

Presenta la información utilizando un gráfico estadístico pertinente. Luego, señala a qué porcentaje de estudiantes encuestados les gusta el cebiche.

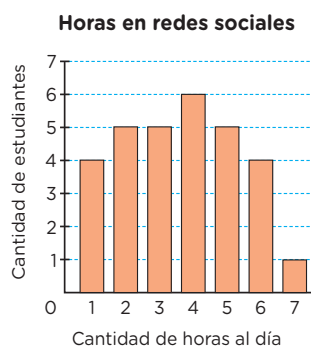
5. ¿Cuál de los siguientes gráficos indica exactamente la cantidad de familias que tienen un determinado número de computadoras portátiles? Argumenta tu respuesta.



6. Juan presentó y sustentó un trabajo que le dejó su profesor. El trabajo consistía en realizar una encuesta sobre el número de horas por día que dedican los estudiantes de tercero de secundaria de su colegio a las redes sociales. La muestra que consideró fue de 30 estudiantes.

Juan ha presentado la información de la siguiente manera:

Horas al día ( $x_i$ )	$f_i$	$F_i$	$x_i \cdot f_i$
1	4	4	4
2	5	9	10
3	5	14	15
4	6	20	24
5	5	25	25
6	4	29	24
7	1	30	7
<b>Total</b>	<b>30</b>		<b>109</b>



Luego de sustentar su informe, Juan explicó que no se puede concluir que los estudiantes dedican 3,63 horas diarias a las redes sociales porque el rango es igual a 6 y está muy lejos de la media; por lo tanto, los datos están muy dispersos. ¿Estás de acuerdo con la explicación de Juan?, ¿por qué?



### ¿Sabías que...?

Según los resultados de la Encuesta Nacional de Hogares (ENAH) del cuarto trimestre del 2022, solo el 58,4 % de los hogares del país tienen acceso a Internet.

La población del país que más accede a Internet es la de jóvenes de 19 a 24 años de edad, con 93,8 %; seguida del grupo de 12 a 18 años, con 87,0 %, y del grupo de 25 a 40 años, con 86,9 %. En menor proporción, usan Internet las poblaciones de 6 a 11 años (58,3 %) y la de 60 a más años (37,6 %).



### Ten en cuenta

La mediana es el valor que ocupa el valor central de la muestra. Para calcular la mediana en el caso de datos agrupados, se deben conocer los límites, la amplitud y la frecuencia acumulada para cada intervalo.

$$Me = L_i + \left( \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \right) \cdot A$$

$L_i$ : límite inferior

$A$ : amplitud de la clase

$n$ : número de datos

$f_i$ : frecuencia de la clase mediana

$F_{i-1}$ : frecuencia acumulada anterior a la clase mediana

#### Ejemplo

Dada la tabla, calcula el valor de la mediana.

Estatura (cm)	$f_i$	$F_i$
[145; 150[	4	4
[150; 155[	9	13
[155; 160[	2	15
[160; 165[	3	18
[165; 170]	2	20
<b>Total</b>	$n = 20$	

$\frac{n}{2} = 10 \rightarrow$  La clase mediana es [150; 155[.

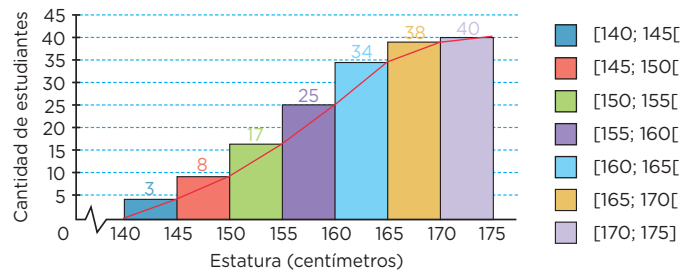
Luego:

$L_i = 150$ ;  $A = 5$ ;  $n = 20$ ;  $f_i = 9$  y

$F_{i-1} = 4$

$Me = 150 + \left( \frac{10 - 4}{9} \right) (5) \approx 153,3$

7. El siguiente gráfico registra las estaturas, en centímetros, de 40 estudiantes de tercer grado de secundaria. Calcula el valor de la mediana.



En la maternidad de Lima se ha registrado la masa, en kilogramos, de 20 recién nacidos:

2,8 1,8 3,8 2,5 2,7 2,9 3,5 3,8 3,1 2,2  
3,0 2,6 1,8 3,3 2,9 3,7 1,9 2,6 3,3 2,3

La masa ideal de un recién nacido en condiciones normales está entre 2,5 y 4 kilogramos.

8. Con la información anterior, elabora una tabla de frecuencias de datos agrupados y calcula la mediana, la media y la moda. ¿Con cuál de las medidas de tendencia central se puede asegurar que la mitad de los 20 recién nacidos están dentro del rango de la masa ideal? Luego, determina el valor de la desviación estándar de las masas del grupo de recién nacidos. ¿Qué información te brinda el valor obtenido?

## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Representé las características de la muestra de una población en estudio mediante variables cuantitativas.			
Leí tablas, gráficos de barras y otros que contengan valores sobre medidas estadísticas y de tendencia central.			
Empleé procedimientos para determinar la media, el rango, la varianza y la desviación estándar.			
Planteé conclusiones sobre las características o tendencias de una población y las justifiqué.			

## ¿Cómo tomamos decisiones para solicitar un préstamo de emprendimiento?

### Construimos nuestros aprendizajes



#### Propósito

Establecemos relaciones entre datos y acciones referidas a trabajar con tasas de interés simple. Expresamos con lenguaje numérico nuestra comprensión sobre las tasas de interés simple. Asimismo, empleamos estrategias de cálculo y procedimientos diversos para determinar tasas de interés según las condiciones de la situación.



#### Organizamos la campaña navideña

Para la campaña de fiestas navideñas, Juana desea ampliar su negocio de venta de ropa para niños, y necesita disponer de S/15 000. A ella le ofrecen el préstamo de dicha cantidad para pagar durante 5 meses con una tasa de interés simple del 10 % mensual. Juana no sabe si los intereses serán muy altos y no tiene mucho tiempo para tomar una decisión; por ello, le pide a su hijo Joaquín que la ayude a determinar el interés que deberá pagar por los 5 meses.



Fuente: <https://stock.adobe.com>

- ¿Qué resultados le presentará Joaquín a su mamá?
- ¿Qué decisión crees que tomaría Juana?



Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 5.



## Comprendemos el problema

1. ¿De qué trata la situación?


2. ¿Qué datos encuentras en la situación?


3. ¿Cuáles son las condiciones del préstamo?


4. ¿Qué te piden calcular las preguntas de la situación?


## Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

5. Analiza esta situación: Jorge le presta S/400 a su hermana con la condición de que ella le pague el 10 % mensual durante 3 meses. Determina la ganancia total de Jorge y cuánto recibirá en total al final del préstamo.

La cantidad prestada (el capital) es S/400.

$C = S/400$  ← El capital permanecerá constante durante los 3 meses.

El préstamo dura 3 meses.

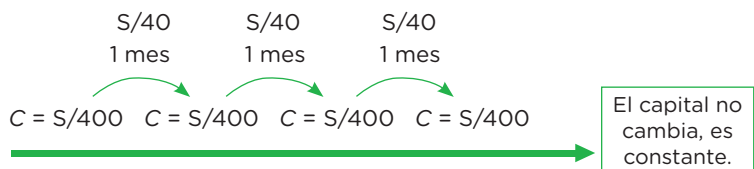
$t = 3$  meses

Además,  $r = 10\%$  mensual. ← Cada mes, Jorge ganará el 10% del capital prestado (C).

Ahora vamos a deducir la fórmula del interés simple:

Ganancia de cada mes < > interés mensual

10 % de S/400 = S/40



Se observa que la ganancia total equivale al interés total:

Interés (I) = S/40 + S/40 + S/40 = S/120

= 3 × S/40

= 3 × 10 % (400) ← capital (C)

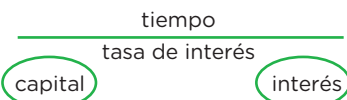
tiempo (t) ↑

tasa (r) ↑



### Recuerda

Los elementos de la regla de interés son el capital, la tasa de interés, el tiempo, el interés y el monto.



#### Capital (C)

Es toda cantidad de dinero que se va a ceder para que produzca una ganancia luego de un periodo de tiempo.

#### Tiempo (t)

Es el periodo durante el cual se va a imponer el capital.

#### Tasa de interés (r)

Es la ganancia que se obtiene por cada 100 unidades monetarias prestadas en la unidad de tiempo establecida. Por ejemplo:

Una tasa del 4 % semestral implica que cada seis meses se ganará S/4 por cada S/100 prestados.



Entonces, podemos deducir la fórmula para el interés simple:  
 Interés ( $I$ ) = tiempo ( $t$ ) · tasa ( $r$ ) · capital ( $C$ )

$$I = C \cdot r \cdot t$$

6. Observa el siguiente ejemplo: Juan Carlos solicita un préstamo de S/2000 a una tasa de interés simple del 10 % anual para pagarlo en 4 años. ¿Cuál será el monto total que pagará al finalizar el préstamo?  
 En la siguiente tabla se muestran los intereses que Juan Carlos pagará durante los cuatro años.

Año	Capital ( $C$ )	Interés por cada año ( $C \cdot r$ )
Año 1	S/2000	$2000 \times 10 \% = 2000 \times 0,10 = 200$
Año 2	S/2000	$2000 \times 10 \% = 2000 \times 0,10 = 200$
Año 3	S/2000	$2000 \times 10 \% = 2000 \times 0,10 = 200$
Año 4	S/2000	$2000 \times 10 \% = 2000 \times 0,10 = 200$

$$\text{Interés} = 200 + 200 + 200 + 200 = \text{S}/800$$

Luego, determinamos el monto final ( $M$ ):

$$\begin{aligned} M &= C + I \\ M &= 2000 + 800 \\ M &= 2800 \end{aligned}$$

El monto final que Juan Carlos pagará por el dinero prestado es S/2800.

## Ejecutamos la estrategia o plan

7. Organiza la información a partir de los datos de la situación. Completa el siguiente cuadro:

Cantidad solicitada	Tiempo del préstamo	Tasa de interés mensual

8. Si la tasa de interés simple es igual al 10 % mensual, entonces para el cálculo de intereses generados por el préstamo se utiliza la siguiente fórmula:

$$I = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$$

Donde:

$I$ : interés

$C$ : capital

$i$ : valor de la tasa de interés

$t$ : tiempo

A partir de ello, ¿cuánto le corresponde pagar de intereses a Juana por el préstamo solicitado?




## Recuerda

### Interés ( $I$ )

Es la ganancia o beneficio que produce el capital impuesto durante cierto tiempo y bajo determinadas condiciones.

### Monto ( $M$ )

Es la cantidad que se obtiene al sumar el capital y el interés obtenido en un determinado tiempo:  $M = C + I$ .



En el caso de que no se especifique el periodo de aplicación de la tasa, debemos considerar que se trata de una tasa anual. Por ejemplo, "una tasa de 8,2 %" representa una tasa del 8,2 % anual.



Para aplicar la fórmula de interés, debemos verificar que el tiempo del préstamo y la tasa de interés estén expresados en la misma unidad de tiempo. En este caso, tenemos:

$$t = 5 \text{ meses}$$

$$r = 10 \% \text{ mensual}$$

Por tanto, podemos aplicar la fórmula directamente.



## Ten en cuenta

En diversas situaciones cotidianas se requiere la estrategia de realizar esquemas para comprender mejor las situaciones y los procesos. Un esquema apunta a encontrar una estrategia de solución.

La estrategia de realizar diagramas tabulares (tablas) se emplea cuando se brinda información sobre características que relacionan dos grupos.



### ¿Sabías que...?

El Programa Especial de Apoyo Financiero a la Micro y Pequeña Empresa (Promype) tiene como finalidad otorgar recursos financieros a las entidades especializadas en financiar a las mypes, a fin de que sean destinados exclusivamente a este sector.

Revisa y analiza detenidamente el procedimiento utilizado en la sección “Ejecutamos la estrategia o plan”. Luego, responde las preguntas de esta sección.



9. Responde la primera pregunta de la situación.


10. ¿A cuánto asciende el capital o la cantidad solicitada por Juana?


11. ¿Cuál es el resultado de sumar el capital prestado y los intereses por pagar?


12. Responde la segunda pregunta de la situación.


### Reflexionamos sobre el desarrollo

13. ¿Puedes verificar los resultados obtenidos?


14. ¿Podrías realizar otro procedimiento para responder la primera pregunta de la situación? Explica cuál sería.


15. Si la entidad financiera le hubiera otorgado el préstamo a Juana con una tasa de interés simple del 10 % anual, ¿cuánto sería el interés que pagaría por el préstamo en un año?




## Comprobamos nuestros aprendizajes

### Propósito

Expresamos con lenguaje numérico nuestra comprensión de la tasa de interés simple (tasa mensual y tasa anual) para interpretar el problema en contexto. Justificamos con ejemplos y con nuestros conocimientos matemáticos afirmaciones sobre las equivalencias entre tasas de interés, y corregimos errores si los hubiera.



### Situación A: La mejor propuesta en un préstamo

José Flores solicita un préstamo a una caja municipal de ahorro y crédito, por la suma de S/2500, para comprar una laptop. Esta entidad financiera le hace dos propuestas:

- Primera propuesta: una tasa de interés simple del 6,5 % mensual en 2 años.
- Segunda propuesta: una tasa de interés simple del 5 % mensual y un año más que en la propuesta anterior.



Fuente: <https://elcomercio.pe/>

¿Cuál de las dos propuestas le conviene a José Flores?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

Para calcular el interés, aplicamos la siguiente fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Donde:

$I$ : interés

$C$ : capital

$r$ : valor de la tasa de interés

$t$ : tiempo



### Recuerda

Si hay que elegir entre dos o más propuestas al solicitar un préstamo, será más conveniente elegir aquella que cobre un interés menor.





### Situación B: Opción para ahorrar

La profesora Emma Álvarez ha recibido una bonificación especial de S/5000 por las buenas prácticas docentes aplicadas en su institución educativa. Ella decide ahorrar esta bonificación. Para ello, tiene dos opciones: la primera es depositar el dinero a una tasa de interés simple del 1,2 % mensual por un periodo de 2 años, y la segunda es depositar el dinero con un interés simple del 12 % anual durante 2 años.

¿Cuál de las dos opciones le conviene?



Fuente: Freepik

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

Organizamos la información en un diagrama tabular para determinar el interés generado con cada una de las opciones.

Primera propuesta	Segunda propuesta
$C = S/5000$ $r = 1,2 \text{ \% mensual} = 14,4 \text{ \% anual} \rightarrow r = 14,4$ $t = 2 \text{ años}$  $I = \frac{5000 \times 14,4 \times 2}{100}$  $I = \text{[ ] soles}$	$C = S/5000$ $r = 12 \text{ \% anual} \rightarrow r = 12$ $t = 2 \text{ años}$  $I = \frac{5000 \times 12 \times 2}{100}$  $I = \text{[ ] soles}$

**Respuesta:** Le conviene la [ ] opción, ya que su ahorro le generará un interés de [ ], mientras que con la [ ] opción solo ganará [ ] de interés.

El ahorro es importante porque te proporciona seguridad financiera, te ayuda a alcanzar metas a largo plazo, te brinda independencia, tranquilidad y flexibilidad, y te abre puertas a oportunidades de inversión. Establecer el hábito del ahorro desde temprana edad es una práctica valiosa para garantizar una buena salud financiera a lo largo de la vida.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué para el procedimiento de la primera opción se considera una tasa de interés de 14,4 % y no la propuesta en la situación de 1,2 %?


2. ¿Por qué para el procedimiento de la segunda opción se considera la misma tasa de interés mencionada, es decir, 12 %?






## Aprendemos a partir del error

### Situación C: Préstamo para la compra de un automóvil

El señor Fernández desea adquirir un auto con el fin de realizar servicios de taxi. El precio del vehículo es de S/48 000, pero solo dispone de S/12 500. Entonces, decide financiar el dinero que le falta por medio de una entidad bancaria. Él tiene las siguientes opciones:

- Banco Abcredit: por 4 años con una tasa de interés de 4,8 % anual.
- Caja Municipal de Ahorros y Créditos Perumás: por 5 años con una tasa de interés de 0,5 % mensual.

¿Cuál de las dos opciones le conviene al señor Fernández?

**Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.**

#### Resolución

Organizamos la información en un diagrama tabular para determinar el interés con cada una de las opciones. Si el precio del vehículo es S/48 000 y dispone de S/12 500, entonces lo que debe financiar es la diferencia entre estos valores:

$$48\ 000 - 12\ 500 = 35\ 500$$

El monto que debe financiar la entidad es S/35 500.

Banco Abcredit	Caja Municipal de Ahorros y Créditos Perumás
$C = S/35\ 500$ $r = 4,8\% \text{ anual} \rightarrow r = 4,8$ $t = 4 \text{ años}$	$C = S/35\ 500$ $r = 0,5\% \text{ anual} \rightarrow r = 0,5$ $t = 5 \text{ años}$
$I = \frac{35\ 500 \times 4,8 \times 4}{100}$	$I = \frac{35\ 500 \times 0,5 \times 5}{100}$
$I = 6816 \text{ soles}$	$I = 887,5 \text{ soles}$

**Respuesta:** Le conviene financiar el dinero con la Caja Municipal de Ahorros y Créditos Perumás, porque solo pagará S/887,5 de intereses.

**Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:**

- ¿Son correctos los procedimientos realizados? Sustenta tu respuesta.


- De no ser correcto algún procedimiento, corrige el error y responde la pregunta de la situación.




#### Ten en cuenta

Para aplicar el interés simple, la tasa y el tiempo deben encontrarse en las mismas unidades.

##### Ejemplo

El banco Credilisto ofrece préstamos a una tasa mensual de 0,3 % por 4 años. Si Cecilia decide solicitar un préstamo de S/20 000, ¿cuánto será el interés que deberá pagar?

##### Resolución

Convertimos la tasa mensual a tasa anual, pues el tiempo se encuentra en años:  
 $r = 0,3\% \text{ mensual}$   
 $r = 0,3 \times 12 = 3,6\% \text{ anual}$   
 Finalmente, aplicamos la fórmula:

$$I = \frac{C \times r \times t}{100}$$

$$I = \frac{20\ 000 \times 3,6 \times 4}{100} = S/2880$$





## Evaluamos nuestros aprendizajes



### Propósito

Establecemos relaciones entre datos y las transformamos en expresiones numéricas que incluyen operaciones de interés simple. Expresamos con lenguaje numérico nuestra comprensión sobre las tasas de interés simple y empleamos estrategias para determinarlas. Justificamos afirmaciones sobre las equivalencias entre tasas de interés.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Patricia recibió un bono por su buen desempeño durante el último año y ha decidido ahorrarlo por un tiempo. ¿En cuánto se convertirá su capital de S/12 000 al 5 % anual si se mantiene en el banco durante 2 años y medio?
 

<input type="radio"/> a) S/1500	<input type="radio"/> c) S/600
<input type="radio"/> b) S/13 500	<input type="radio"/> d) S/13 200
  
2. Luego de un tiempo y gracias a su constancia en ahorrar, Sebastián juntó un capital de S/20 000 y ha decidido darlo en préstamo para que genere intereses. ¿Cuál es el interés que produce en 7 años su capital, si lo presta con una tasa del 9 % de interés simple?
 

<input type="radio"/> a) S/1800	<input type="radio"/> c) S/12 600
<input type="radio"/> b) S/32 600	<input type="radio"/> d) S/1260

### El cheque del abuelo

Cuando Gian Piero tenía 8 años, recibió un cheque de su abuelo por S/500 el día que ganó, en la disciplina de natación, los Juegos Deportivos Escolares Nacionales. Este monto fue depositado por su papá en una cuenta de ahorros al 12 % de interés simple anual.



Fuente: Freepik

Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.

3. Si actualmente Gian Piero tiene 26 años, ¿cuál es el interés generado por el regalo de su abuelo?
4. ¿Cuánto habrá acumulado Gian Piero en su cuenta de ahorros?
5. Una inmobiliaria encargada de la construcción, venta, alquiler y administración de viviendas tiene como meta ganar un interés simple de S/580 000 en un periodo de 2 años y medio. ¿Cuál debe ser el capital inicial que debe depositar si se sabe que la tasa de interés es del 4 % trimestral?
 

<input type="radio"/> a) S/1 450 000	<input type="radio"/> c) S/232 000
<input type="radio"/> b) S/5 800 000	<input type="radio"/> d) S/120 833,33



### Ten en cuenta

Para pasar de una tasa trimestral a una mensual, dividimos entre 3; y, para pasar a una tasa anual, multiplicamos por 4.

#### Ejemplo

6 % trimestral = 2 % mensual  
= 24 % anual



### Ten en cuenta

Si obtenemos un préstamo a interés simple, las cuotas mensuales se calcularán dividiendo el monto entre el número de meses.

#### Ejemplo

¿Cuál será la cuota mensual de un préstamo de S/6000 a una tasa de 12 % anual en 24 meses?

#### Resolución

$$I = \frac{6000 \times 12 \times 2}{100} = 1440$$

$$M = C + I$$

$$M = 6000 + 1440 = 7440$$

$$\text{Cuota mensual} = \frac{7440}{24}$$

$$\text{Cuota mensual} = S/310$$

6. Una entidad financiera elabora un anuncio publicitario para captar más clientes. De acuerdo al afiche mostrado, ¿cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos?



- I. El monto a pagar al término del tiempo indicado es S/9000. ( )
- II. El tiempo establecido en el anuncio es 1,5 años. ( )
- III. El interés que se debe pagar es S/2025. ( )

7. El fondo de ahorro es una prestación que establecen las empresas a favor de los empleados durante un determinado tiempo. Si el empleador de una estación de servicio de gas propone a sus empleados otorgarles un fondo de ahorro que paga 12 % de interés simple, de tal manera que genere S/2400 por concepto de intereses en 4 años, ¿cuánto deberá invertir cada empleado para obtener la cantidad indicada?

- a) S/1152
- b) S/7400
- c) S/5000
- d) S/1525,24

8. El papá de Rolando decide comprar una cámara digital. Al observar varios catálogos, ha encontrado que el modelo de cámara que necesita es ofrecido a crédito por dos tiendas, A y B, a un precio de S/1999, con tasas de interés simple mensual de 10 % y 15 % en 7 y 4 meses, respectivamente. ¿Cuánto pagará de interés el papá de Rolando si escoge la mejor propuesta?

- a) S/1399,30
- b) S/799,60
- c) S/2398,80
- d) S/1199,40

## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Crterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos y las transformé en expresiones numéricas que incluyen operaciones de interés simple.			
Expresé con lenguaje numérico mi comprensión sobre las tasas de interés simple y algunos términos financieros.			
Empleé estrategias de cálculo y procedimientos diversos para determinar tasas de interés.			
Justifiqué con ejemplos y con mis conocimientos matemáticos afirmaciones sobre las equivalencias entre tasas de interés.			

## ¿Cómo podemos determinar valores máximos y mínimos en diversos contextos?

### Construimos nuestros aprendizajes



#### Propósito

Establecemos relaciones entre datos, valores desconocidos, condiciones de equivalencia, y las transformamos en expresiones algebraicas o gráficas que incluyen inecuaciones. Seleccionamos y empleamos estrategias heurísticas, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para solucionar inecuaciones, usando propiedades de las desigualdades.



#### Las líneas aéreas y sus condiciones de viaje

Alejandro está planeando sus vacaciones y, para ello, ha buscado información de algunas empresas aéreas. Averiguó por Internet las ofertas para las fechas deseadas, analizó si le convenían las escalas, etc. Después de evaluar las ofertas de las aerolíneas Tucumán, Flyhour y Mayorsky, finalmente escogió Mayorsky. Al ver las condiciones de vuelo, reconoce que las otras dos aerolíneas tenían información más explícita sobre el equipaje de mano.

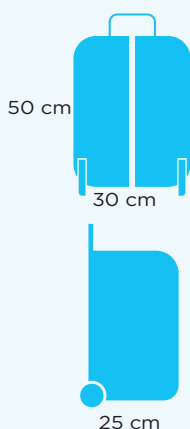
##### Aerolínea Tucumán

Por su seguridad y confort a bordo, el equipaje de mano debe cumplir con las medidas y peso máximo. De lo contrario, será despachado a la bodega del avión. Todo equipaje de mano que exceda el tamaño permitido deberá ser despachado a la bodega del avión, ya que no podrá ser ubicado ni en los compartimentos superiores de la cabina de pasajeros ni debajo de los asientos.

Peso máximo:

- Clase turista: 5 kg
- Clase Club Economy: 9 kg
- Internacionales: 10 kg

Medidas máximas

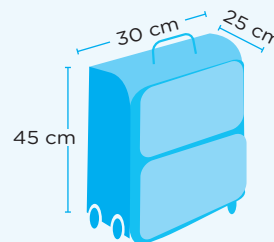


##### Aerolínea Flyhour

Se puede llevar en cabina un solo equipaje de mano de 8 kg de peso por persona, que no debe superar las dimensiones mostradas (incluidas asas, tiradores y ruedas).

Objetos transportables como equipaje de mano:

Los objetos personales, como carteras, portadocumentos u ordenadores personales, son considerados equipaje de mano y pueden ser transportados en cabina ajustándose a los límites indicados.



##### Aerolínea Mayorsky

- Peso máximo: Se permite una pieza de equipaje de mano por cliente pagando tarifa completa.
- 10 kg (22 libras)
- La longitud máxima de las dimensiones del equipaje es igual a la suma del largo, ancho y alto (largo + ancho + alto), y no debe superar los 114,3 cm (45 pulgadas).

Si Alejandro desea colocar su equipaje de mano en el compartimento alto del avión, ¿cuál es el máximo valor entero que podría tener la medida del ancho de su maleta (en centímetros y en pulgadas), si se sabe que este ancho es la mitad del largo y la tercera parte de su altura?











## Comprobamos nuestros aprendizajes

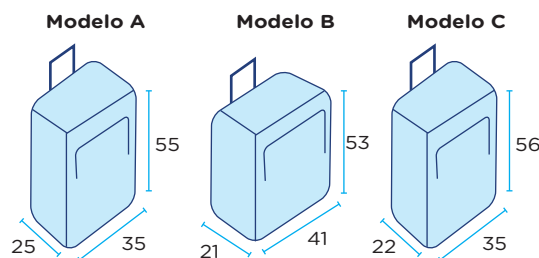


### Propósito

Expresamos con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, así como con lenguaje algebraico, nuestra comprensión sobre la solución de una inecuación lineal. Asimismo, justificamos con ejemplos y propiedades matemáticas las afirmaciones de las posibles soluciones de inecuaciones lineales, y corregimos errores si los hubiera.

### Situación A: Dimensiones de las maletas

Miriam siempre transporta en sus viajes un equipo electrónico y su maleta de mano. Según el lugar de viaje, lleva ropa ligera o de abrigo, que puede variar en peso y volumen. La fórmula matemática que expresa las características del volumen con que siempre podría viajar es  $(x + 0,007) \text{ m}^3 \leq 0,050 \text{ m}^3$ .



¿Cuál de los modelos recomendarías que use Miriam para su viaje, si las dimensiones de las maletas están en centímetros y “x” representa el volumen de su equipaje?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

- Despejamos la variable  $x$  en la inecuación dada para determinar el volumen del equipaje de Miriam, que se halla multiplicando el alto por el largo y el ancho de la maleta:

$$\begin{aligned}
 x + 0,007 &\leq 0,050 \\
 x + 0,007 - 0,007 &\leq 0,050 - 0,007 \\
 x &\leq 0,043 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

- Ahora calculamos el volumen de las maletas que se proponen:  
 Modelo A:  $V_A = 25 \times 35 \times 55 = 48\,125 \text{ cm}^3 \approx 0,048 \text{ m}^3$   
 Modelo B:  $V_B = 21 \times 41 \times 53 = 45\,633 \text{ cm}^3 \approx 0,046 \text{ m}^3$   
 Modelo C:  $V_C = 22 \times 35 \times 56 = 43\,120 \text{ cm}^3 \approx 0,043 \text{ m}^3$

**Respuesta:** El modelo de maleta que le recomendaría usar a Miriam sería el C.

### Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

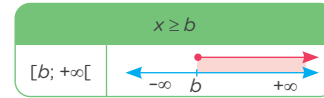
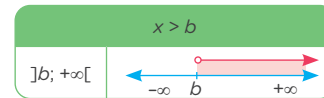
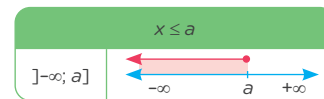
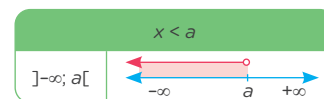
- ¿Cuál sería el conjunto solución en los números reales  $\mathbb{R}$  de la expresión  $x \leq 0,043$ ? Escríbelo como intervalo y en forma de conjunto; luego, represéntalo en la recta numérica.


- ¿Cómo se procedió para convertir  $43\,120 \text{ cm}^3$  a  $0,043 \text{ m}^3$ ?




### Recuerda

La solución de una inecuación puede escribirse como un intervalo y representarse gráficamente en la recta numérica. Así, tenemos:



## Situación B: Equipaje permitido sin cargo

Señala qué aerolínea y en qué clase permiten un equipaje con las condiciones de los modelos matemáticos planteados, siendo  $x$  el peso máximo de una maleta.

- a.  $2x + 10 \text{ kg} \geq 74 \text{ kg}$      b.  $2x + 5 \text{ kg} \geq 69 \text{ kg}$      c.  $x > 23 \text{ kg}$      d.  $10 \text{ kg} + 2x \geq 90 \text{ kg}$

Tipo de equipaje	Clase	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea 4	Aerolínea 5	Aerolínea 6
 Equipaje permitido sin cargo	Ejecutiva	1 bolso de mano de 10 kg y 2 maletas de 32 kg	1 bolso de mano de 10 kg y 2 maletas de 32 kg	2 bolsos de mano de 4 kg y 3 maletas de 32 kg	1 maleta de 23 kg	1 bolso de 5 kg + 1 pieza de 23 kg	1 bolso de 5 kg + 1 pieza de 20 kg
	Económica	1 bolso de mano de 10 kg y 2 maletas de 23 kg	1 bolso de mano de 10 kg y 2 maletas de 25 kg	1 bolso de mano de 5 kg y 2 maletas de 32 kg	1 maleta de 23 kg	1 bolso de 5 kg + 1 pieza de 23 kg	1 bolso de 5 kg + 1 pieza de 15 kg

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

- Despejamos la variable  $x$  en cada inequación para tener más claro el peso máximo de la maleta:

a.  $2x + 10 \text{ kg} \geq 74 \text{ kg}$

$$x \geq 32 \text{ kg}$$

En este modelo matemático, se tiene lo siguiente: 2 maletas que pesen 32 kg a más y un equipaje de mano de 10 kg.

{ Aerolínea 1, ejecutiva  
Aerolínea 2, ejecutiva

b.  $2x + 5 \text{ kg} \geq 69 \text{ kg}$

$$x \geq \text{[ ]} \text{ kg}$$

En este modelo matemático, se tiene lo siguiente: 2 maletas que pesen [ ] kg a más y un equipaje de mano de 5 kg.

{ Aerolínea 3, [ ]

c.  $x > 23 \text{ kg}$

En este modelo matemático, se tiene 1 maleta que pese más de 23 kg.

{ Aerolíneas 1, 2 y 3, [ ]  
Aerolínea [ ], económica

d.  $10 \text{ kg} + 2x \geq 90 \text{ kg}$

$$x \geq \text{[ ]} \text{ kg}$$

En este modelo matemático, se tiene 1 equipaje de mano de [ ] kg y [ ] maletas que pesen [ ] kg a más.

Ninguna aerolínea.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué procedimiento se siguió para responder sobre las expresiones matemáticas planteadas en la situación?


- ¿Por qué la expresión matemática **d** no se ajusta a ninguna aerolínea?




## Evaluamos nuestros aprendizajes



### Propósito

Establecemos relaciones entre datos y las transformamos en expresiones algebraicas que incluyen inecuaciones. Expresamos con diversas representaciones nuestra comprensión sobre la solución de una inecuación lineal. Seleccionamos y empleamos estrategias heurísticas para determinar términos desconocidos y solucionar inecuaciones.



### Ten en cuenta

El tanto por ciento es el número de partes que se toma de una cantidad que se ha dividido en 100 partes iguales.

El porcentaje es el resultado de aplicar el tanto por ciento a una cantidad.

$$a \% \text{ de } b = \frac{a}{100} \cdot b$$

#### Ejemplo

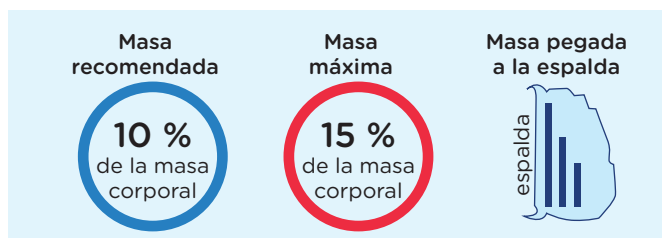
$$3 \% \text{ de } 25 = \frac{3}{100} \times 25 = 0,75$$

Tanto por ciento

Porcentaje

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Diana es una estudiante del tercer grado de secundaria. Diariamente, alista su mochila con cuadernos, libros, cartuchera y otros materiales. Según la Organización Mundial de la Salud (OMS), cada estudiante puede llevar en su mochila el 10 % de su masa corporal o, como máximo, el 15 %, a fin de no desarrollar afecciones en la columna. Si Diana pesa 48 kg, ¿cuáles son las posibles masas de su mochila para no afectar su salud?



- a) Desde 2,08 kg hasta 7,28 kg
- b) Desde 4,8 kg hasta 7,2 kg
- c) Desde 2,08 kg hasta 8,2 kg
- d) Desde 1,8 kg hasta 7,7 kg

2. Para construir una casa, se requiere un determinado número de columnas. A su vez, estas necesitan un número adecuado de estribos. Se sabe que, para armar una columna simple, se emplean entre 28 y 32 estribos. ¿Cuál es el máximo número de estribos que se podrían utilizar si se van a armar 18 columnas simples?



Fuente: blog.laminasyaceros

- a) 505
- b) 504
- c) 576
- d) 575

3. El puntaje de una asignatura es la media o promedio aritmético de las calificaciones de tres exámenes. Si un estudiante ha obtenido 13 en el primer examen y 12 en el segundo, ¿cuál es el puntaje que debe obtener en el tercer examen para aprobar la asignatura? Considera que la asignatura se aprueba con un puntaje mínimo de 14.

- a)  $x \geq 17$
- b)  $x < 17$
- c)  $x > 17$
- d)  $x \leq 14$



### Recuerda

La **media aritmética** ( $\bar{x}$ ) es igual a la suma de los datos dividida entre el número total de datos.

#### Ejemplo

Halla la media de las siguientes calificaciones: 13; 12; 11; 10

#### Resolución

$$\bar{x} = \frac{13 + 12 + 11 + 10}{4} = 11,5$$

- 4 —¿Cuánto cuesta el chocolate con churros en la cafetería El Buen Sabor?

—No lo sé, nunca me he fijado —respondió el papá.

—Pero, papá, lo acabamos de tomar mamá, la abuela, mis dos hermanos, tú y yo. ¿Cuánto has pagado?

—Algo más de 35 soles —dijo el papá.

—El domingo pasado, además de nosotros seis, invitaste a dos amigos míos. ¿Cuánto pagaste?

—Era poco menos de 50 soles, pues pagué con un billete de 50 y dejé el vuelto —respondió el papá.

Responde la siguiente pregunta considerando el diálogo del hijo y su papá: ¿cuánto podría costar el chocolate con churros en la cafetería El Buen Sabor? Justifica tu respuesta.



Fuente: Freepik

5. Una empresa de alquiler de autos ofrece dos modelos de contrato. El modelo A consiste en pagar una cantidad fija de S/50, además de 8 céntimos por cada kilómetro recorrido. El modelo B consiste en pagar S/80 sin limitación de kilometraje.

¿A partir de cuántos kilómetros conviene el alquiler según el modelo B?

- a) 375 km                      c) 300 km  
b) 376 km                      d) 325 km

6. Una familia está construyendo su vivienda. Este mes, el esposo logró ahorrar S/130, y la esposa, S/90, para comprar las varillas de hierro de media pulgada para el techo.

- Si compran varillas de hierro de S/30, les sobrará dinero.
  - Si compran varillas de hierro de S/35, les faltará dinero.
- ¿Cuántas varillas de media pulgada podrá comprar la familia con todo lo ahorrado?

- a) 8 fierros                      c) 7 fierros  
b) 6 fierros                      d) 10 fierros

7. Marlon es un transportista que recientemente se ha comprado una camioneta de 2,2 toneladas. Le han sugerido que la diferencia entre el peso de la camioneta vacía y el de la carga no debe ser inferior a 1250 kg. Si debe cargar 7 cajas iguales y 3 sacos de maíz de 60 kg, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada una de las cajas para que pueda ser transportada en su camioneta?

- a) 120 kg                      c) 110 kg  
b) 115 kg                      d) 140 kg



### Ten en cuenta

Kilómetros recorridos	Alquiler modelo A (S/)
1	50 + 0,08
2	50 + 2(0,08)
3	50 + 3(0,08)
⋮	⋮
x	50 + 0,08x



### Recuerda

Tonelada (t)

1 t ≡ 1000 kg

Quintal (q)

1 q ≡ 100 kg



### Ten en cuenta

El sueldo de Alfredo varía de acuerdo a la cantidad de pizzas que logre repartir. Así, tenemos:

Pizzas repartidas	Sueldo
10	$600 + 10 \times 3$
15	$600 + 15 \times 3$
20	$600 + 20 \times 3$
⋮	⋮

8. Una empresa requiere repartidores de pizzas y ofrece las siguientes opciones de contrato:

- Se pagará una cantidad mensual fija de S/600 y, adicionalmente, S/3 por cada *pizza* repartida.
- Sueldo fijo de S/1025, independiente del número de pizzas repartidas.



Fuente: Freepik

- Alfredo escoge la primera modalidad y Ramiro la segunda. Si este mes Alfredo cobró menos que Ramiro, ¿cuál es el número máximo de pizzas que pudo haber repartido Alfredo?
- Calcula el número mínimo de pizzas que se deben repartir para que convenga escoger la primera opción. Justifica el procedimiento realizado.

## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos, valores desconocidos, condiciones de equivalencia, y las transformé en expresiones algebraicas que incluyen inecuaciones.			
Expresé con diversas representaciones mi comprensión sobre la solución de una inecuación lineal.			
Seleccioné y empleé estrategias heurísticas, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para determinar términos desconocidos.			
Justifiqué con ejemplos y con propiedades matemáticas las afirmaciones de las posibles soluciones de inecuaciones lineales.			



## ¿Cómo optimizamos el espacio empleando relaciones de semejanza y congruencia?

### Construimos nuestros aprendizajes



#### Propósito

Leemos textos o gráficos que describen formas geométricas, sus propiedades y relaciones de semejanza y congruencia entre triángulos. Asimismo, establecemos relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos, basadas en semejanza y congruencia de formas geométricas.



#### ¿Hay figuras iguales o parecidas?

Alfredo, estudiante del 3.<sup>er</sup> grado de secundaria, divide cuatro regiones cuadradas en cuatro partes idénticas, las cuales representa de la siguiente manera:

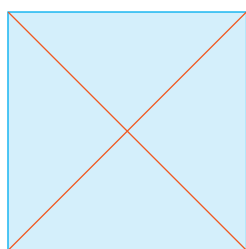


Figura 1

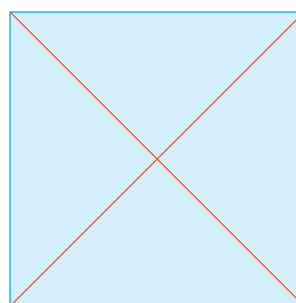


Figura 3

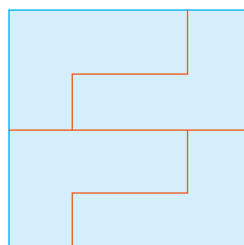


Figura 2

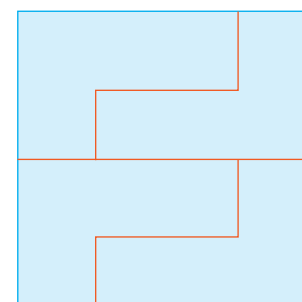


Figura 4

Alfredo sabe que su profesora de matemática trabajó la semejanza y la congruencia de triángulos, pero, al querer explicar esta situación a sus compañeros, no recordó bien los conceptos. Ayuda a Alfredo a establecer diferencias entre las figuras 1 y 3, y entre las figuras 2 y 4.

- ¿Las partes de cada figura son congruentes o semejantes?
- Las partes de las figuras 1 y 3, ¿son congruentes o semejantes?, ¿por qué?
- Las partes de las figuras 2 y 4, ¿cómo son entre sí?

Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 7.



## Comprendemos el problema

1. Observa los cuadrados de la situación y colorea una de las partes que es idéntica en cada uno de ellos.

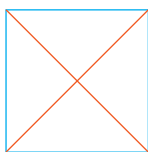


Figura 1

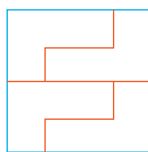


Figura 2

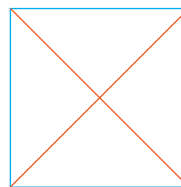


Figura 3

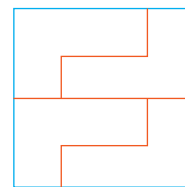
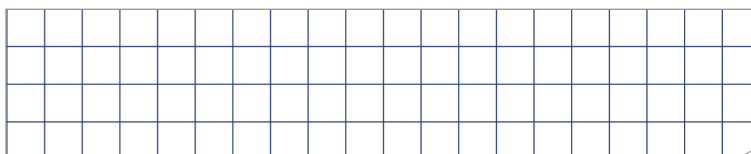


Figura 4

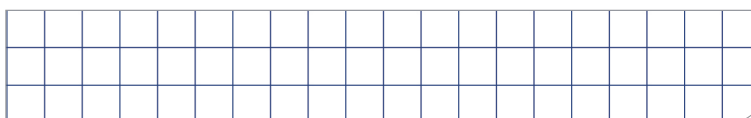
2. En cada cuadrado, ¿cómo son los tamaños de las cuatro partes?



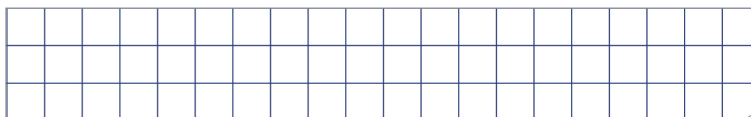
3. ¿Qué palabras nuevas encuentras en la situación?



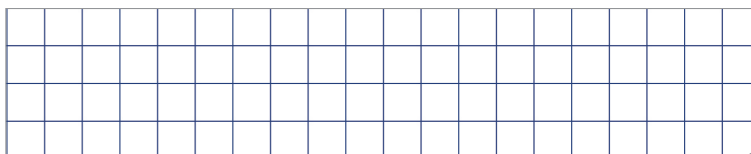
4. Si superpones las piezas o partes de un mismo cuadrado, ¿qué puedes afirmar?



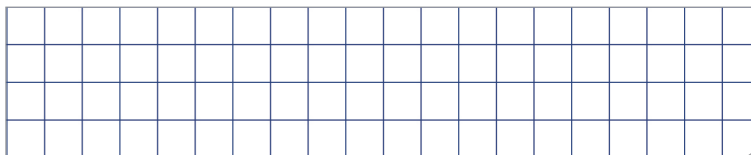
5. ¿Cómo son las formas y los tamaños de las piezas o partes de las figuras 1 y 3?



6. ¿Cómo son las formas y los tamaños de las partes de las figuras 2 y 4?

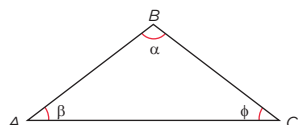


7. ¿Qué te pide la situación?



## Ten en cuenta

Dos polígonos son **semejantes** si los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales.



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

### Ejemplo

¿Cuál será la medida de AC si

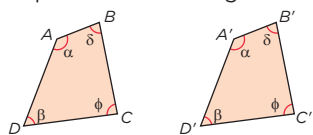
$$AB = 12 \text{ cm y } PR = \frac{4}{3} PQ?$$

### Resolución

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} \rightarrow \frac{PR}{PQ} = \frac{AC}{AB} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{AC}{12}$$

$$AC = 16 \text{ cm}$$

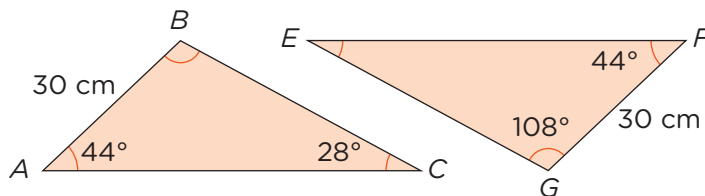
Dos polígonos son **congruentes** si tienen sus ángulos y lados respectivamente congruentes.



$$\begin{aligned} AB &= A'B' & BC &= B'C' \\ CD &= C'D' & DA &= D'A' \end{aligned}$$

## Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

8. Observa el siguiente ejemplo: Magaly construye dos triángulos para su exposición (ver figura). Determina si estos triángulos son congruentes.



En el  $\triangle ABC$  tenemos:  
 $m\angle B = 180^\circ - 44^\circ - 28^\circ \rightarrow m\angle B = 108^\circ$

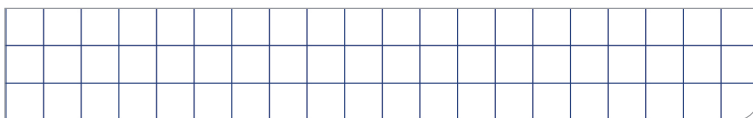
Además, observamos que:

- $m\angle A = m\angle F = 44^\circ$
- $AB = FG = 30 \text{ cm}$
- $m\angle B = m\angle G = 108^\circ$

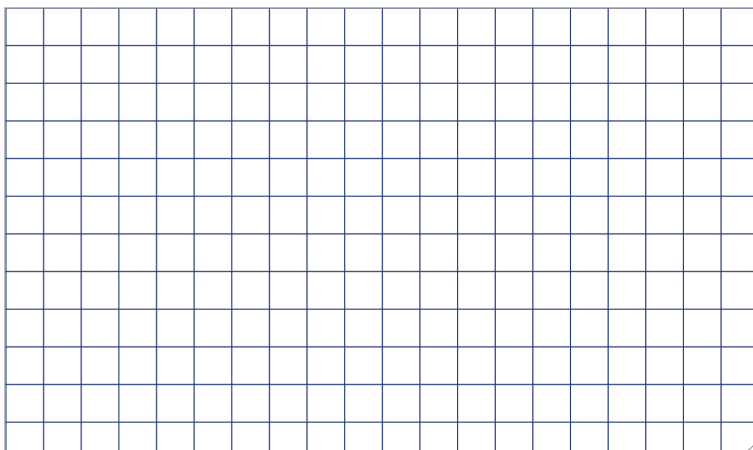
Por tanto,  $\triangle ABC$  y  $\triangle FGE$  son congruentes (criterio de congruencia ALA).

## Ejecutamos la estrategia o plan

9. Superpón entre sí las partes de la figura 2. ¿Cómo son las formas y los tamaños de estas piezas?



10. ¿En qué parejas de figuras las piezas tienen igual forma, pero diferente tamaño? Con la ayuda de un transportador, mide los ángulos de estas piezas. ¿Cómo son sus ángulos? Dibuja.



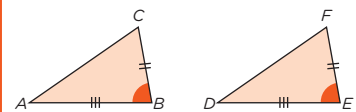
## Ten en cuenta

### Criterios de congruencia de triángulos

Hay tres criterios que podemos emplear para identificar la congruencia de triángulos:

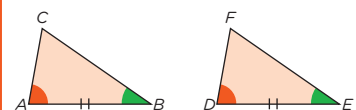
#### Caso LAL (lado-ángulo-lado)

Dos triángulos son congruentes si dos lados de uno de ellos tienen la misma longitud que dos lados del otro triángulo, y si los ángulos comprendidos entre estos lados tienen también la misma medida.



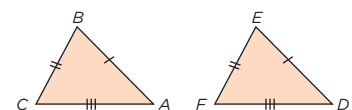
#### Caso ALA (ángulo-lado-ángulo)

Dos triángulos son congruentes si dos ángulos interiores y el lado comprendido entre ellos tienen la misma medida y longitud, respectivamente.



#### Caso LLL (lado-lado-lado)

Dos triángulos son congruentes si cada lado de uno de ellos tiene la misma longitud que el lado correspondiente del otro triángulo.



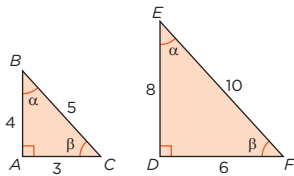


## Ten en cuenta

### Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes congruentes y los lados correspondientes proporcionales.

#### Ejemplo



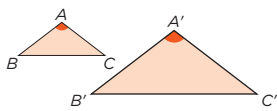
$$\begin{aligned}m\angle CAB &= m\angle FDE \\m\angle ABC &= m\angle DEF \\m\angle BCA &= m\angle EFD\end{aligned}$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \rightarrow \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{3}{6}$$

Luego,  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

#### Criterios de semejanza

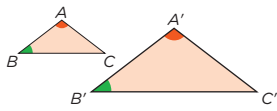
##### Criterio LAL (lado-ángulo-lado)



$$m\angle A = m\angle A' \text{ y } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

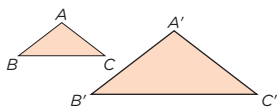
Tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es congruente.

##### Criterio AA (ángulo-ángulo)



$m\angle A = m\angle A'$  y  $m\angle B = m\angle B'$   
Tienen dos ángulos congruentes.

##### Criterio LLL (lado-lado-lado)



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Tienen sus tres lados correspondientes proporcionales.

11. Dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño; y son semejantes cuando tienen la misma forma y sus lados son proporcionales entre sí. Responde la primera pregunta **a** de la situación.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

12. ¿Cómo son las medidas de los perímetros en las partes de cada cuadrado?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

13. ¿Cómo son las medidas de las áreas en las partes de cada cuadrado?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

14. ¿Cómo se puede comprobar la congruencia de dos figuras?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

15. Superpón las partes de la figura 1 en la figura 3 y responde la pregunta **b** de la situación.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

16. Responde la pregunta **c** de la situación.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## Reflexionamos sobre el desarrollo

17. Las figuras semejantes, ¿tienen perímetros o áreas iguales? Explica.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

18. Las figuras congruentes, ¿tienen perímetros o áreas iguales? Explica.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## Comprobamos nuestros aprendizajes



### Propósito

Seleccionamos diversas estrategias para establecer relaciones métricas entre los lados de un triángulo. Asimismo, planteamos afirmaciones sobre las relaciones y propiedades entre los objetos y las formas geométricas. Además, comprobamos la validez de una afirmación mediante propiedades geométricas.

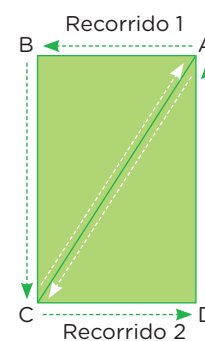
### Situación A: Circuito de carrera

La I. E. San Felipe organiza las olimpiadas interescolares de la comunidad. La carrera de relevos se llevará a cabo en el campo de fútbol de la institución. El recorrido está marcado en el piso. Hay dos circuitos para la carrera:

**Primer circuito:** Parte del punto A, avanza hacia B, luego a C y finaliza en A.

**Segundo circuito:** Empieza en C, se dirige a D, luego hacia A y regresa a C.

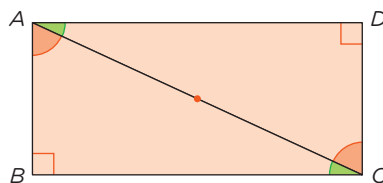
¿Se recorre la misma distancia en ambos circuitos? Explica.



A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

- El campo, que es un rectángulo, se descompone en dos triángulos. Los circuitos consisten en bordearlos.
- Además, como el campo de fútbol es rectangular, sus lados opuestos son paralelos.



$$\left. \begin{array}{l} m\angle BAC = m\angle DCA \\ m\angle BCA = m\angle \text{[ ]} \end{array} \right\} \text{Por ángulos alternos internos}$$

$\triangle ABC$  y  $\triangle CDA$  tienen en común el lado [ ] .

Por el criterio ALA,  $\triangle ABC$  y  $\triangle CDA$  son congruentes. Los lados correspondientes tienen igual longitud; entonces, el perímetro de los dos triángulos es el mismo.

**Respuesta:** La distancia recorrida en ambos circuitos es la misma.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

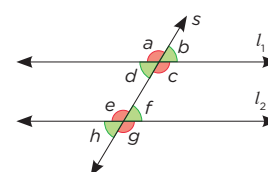
1. ¿Cómo se lee "m $\angle BAC = m\angle DCA$ "?


2. ¿Qué puedes detallar del criterio ALA?




### Recuerda

Si  $l_1 \parallel l_2$  y  $s$  es una recta secante a  $l_1$  y  $l_2$ , se cumple:



Ángulos correspondientes:  
 $a$  y  $e$ ;  $b$  y  $f$ ;  $c$  y  $g$ ;  $d$  y  $h$ .

Ángulos alternos internos:  
 $d$  y  $f$ ;  $c$  y  $e$ .

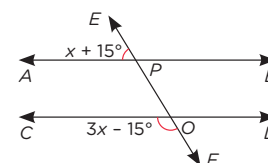
Ángulos alternos externos:  
 $a$  y  $g$ ;  $b$  y  $h$ .

Ángulos conjugados internos:  
 $d$  y  $e$ ;  $c$  y  $f$ .

Ángulos conjugados externos:  
 $a$  y  $h$ ;  $b$  y  $g$ .

#### Ejemplo

Halla el valor de  $x$ , si  $AB \parallel CD$ .



#### Resolución

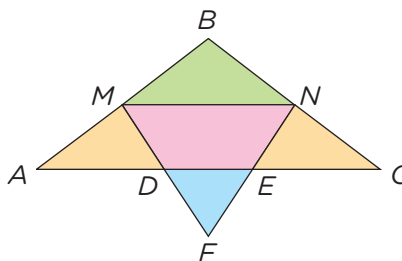
$$\begin{aligned} (x + 15^\circ) + (3x - 15^\circ) &= 180^\circ \\ 4x &= 180^\circ \\ \rightarrow x &= 45^\circ \end{aligned}$$

## Situación B: Diseño de una cometa

Un estudiante diseña el plano de una cometa con las siguientes características:

- Los extremos  $M$  y  $N$  de la varilla están ubicados en los puntos medios de  $AB$  y  $BC$ , respectivamente.
- Los puntos  $D$  y  $E$  son puntos medios de los lados  $MF$  y  $NF$ , respectivamente.
- $DE = 20$  cm

Según las características del diseño del estudiante, ¿cuál es la medida de la varilla  $AC$ ?

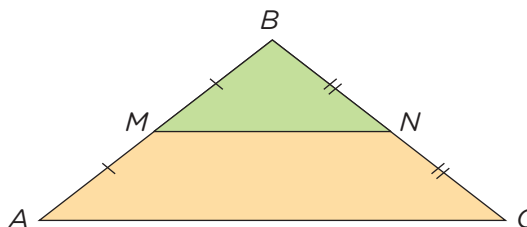


A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

Representamos las características descritas:

- Los extremos  $M$  y  $N$  de la varilla están ubicados en los puntos medios de  $AB$  y  $BC$ , respectivamente.

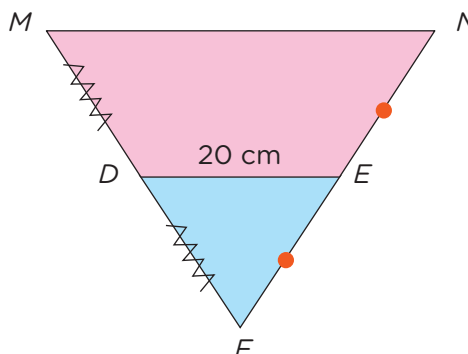


Establecemos la semejanza de triángulos:

$$\text{a. } m\angle ABC = m\angle MBN \qquad \text{b. } \frac{AB}{MB} = \frac{CB}{NB}$$

Luego,  $\triangle ABC \sim \triangle MBN$ .

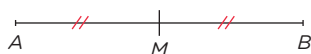
- Los puntos  $D$  y  $E$  son puntos medios de los lados  $MF$  y  $NF$ , respectivamente.
- $DE = 20$  cm



### Ten en cuenta

El **punto medio** de un segmento es el punto que se ubica a la mitad de los extremos del segmento y determina dos segmentos de igual longitud.

#### Ejemplo



$M$  es punto medio del segmento  $AB$ ; por lo tanto, los segmentos  $AM$  y  $MB$  tienen la misma medida.

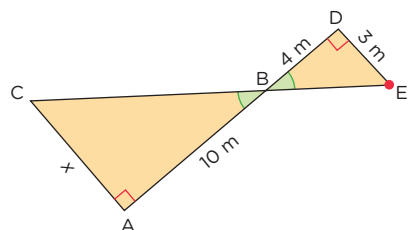
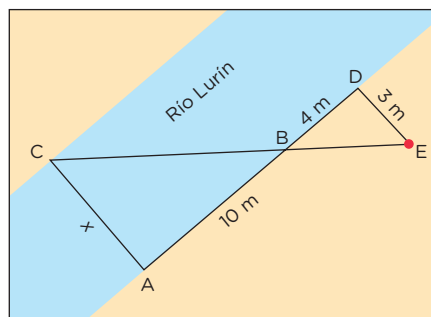




# Aprendemos a partir del error

## Situación C: Dimensiones del río

Los estudiantes de Ingeniería Ambiental de la Universidad San Luis Gonzaga de Ica están realizando un proyecto para la conservación y preservación del río Lurín. Para dicho estudio, necesitan saber las dimensiones del río. Un estudiante registró las medidas (en metros) que se muestran en la figura, donde el segmento  $AC$  es perpendicular a  $AD$  y el segmento  $BD$  es perpendicular a  $DE$ . ¿Cuál es el ancho del río a la altura del punto  $A$ ?



Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

### Resolución

Elaboramos un diagrama de la situación con los datos que tenemos (ver figura del margen).

- Establecemos la semejanza entre  $\triangle CAB$  y  $\triangle EDB$ :  
 $m\angle A = m\angle D = 90^\circ$   
 En el punto  $B$ , se determinan ángulos congruentes (opuestos por el vértice).  
 Entonces,  $\triangle CAB \sim \triangle EDB$ , por el criterio AA.
- Por lo tanto, establecemos la proporción:

$$\frac{x}{10} = \frac{4}{3} \rightarrow x = 13,333...$$

**Respuesta:** El ancho del río en el punto  $A$  es aproximadamente 13,3 m.

**Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:**

1. ¿Cómo se lee " $\triangle CAB \sim \triangle EDB$ "?


--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. Los triángulos  $CAB$  y  $EDB$  son semejantes porque tienen igual forma, pero diferente tamaño; además, se observa que el  $\triangle CAB$  es más grande. ¿Qué opinas sobre la respuesta obtenida, la cual afirma que el segmento  $AC$  es mayor que el segmento  $DE$ ?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. ¿Qué cambiarías en la resolución?

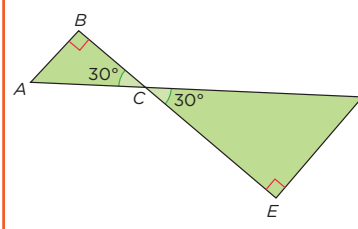
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



### Ten en cuenta

Cuando tenemos dos triángulos rectángulos, podemos establecer la semejanza si se verifica que ambos tienen un ángulo agudo en común. Este es un caso especial de semejanza de triángulos.

**Ejemplo**



Establecemos la semejanza:  
 $m\angle B = m\angle E = 90^\circ$   
 Además, el punto  $C$  determina ángulos opuestos por el vértice:  $m\angle ACB = m\angle DCE$ .  
 Luego,  $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ .



## Evaluamos nuestros aprendizajes

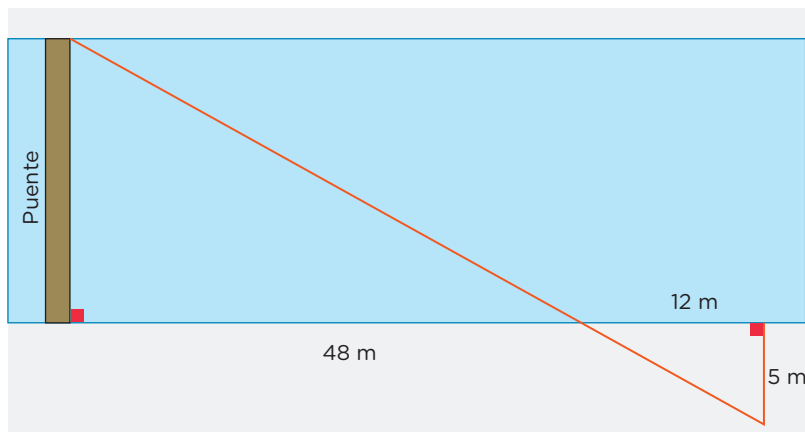


### Propósito

Leemos textos o gráficos que describen formas geométricas, sus propiedades y relaciones de semejanza y congruencia entre triángulos. Seleccionamos diversas estrategias para establecer relaciones métricas entre los lados de un triángulo. Planteamos afirmaciones sobre las relaciones y propiedades entre objetos y formas geométricas, y comprobamos su validez.

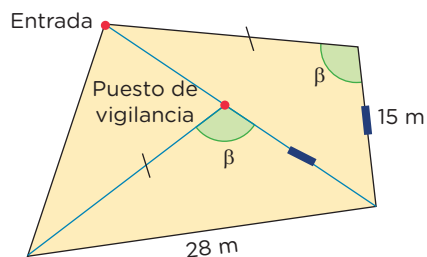
Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. El alcalde de una comunidad tiene como proyecto construir un puente sobre un río cercano a su zona, que permita el traslado de los habitantes y el comercio con otras comunidades. Según los datos del gráfico, ¿cuál será la longitud del puente?



- a) 20 m      b) 12,5 m      c) 1,25 m      d) 2 m

2. En el parque Sinchi Roca se ha habilitado una zona de juegos con tres áreas, distribuidas como se muestra en la figura. Para el control y la seguridad de dichas áreas, el parque cuenta con un puesto de vigilancia. Determina la distancia entre la entrada y el puesto de vigilancia.

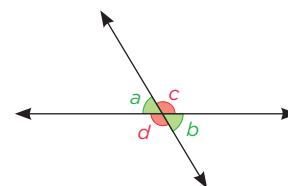


- a) 43 m      b) 12 m      c) 13 m      d) 15 m



### Recuerda

Los ángulos opuestos por el vértice son aquellos formados por dos rectas que se cortan. Estos ángulos son congruentes.

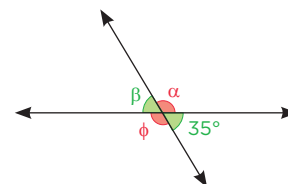


Los ángulos  $a$  y  $b$  son opuestos por el vértice.

Los ángulos  $c$  y  $d$  son opuestos por el vértice.

#### Ejemplo

Halla las medidas de los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\phi$ .



#### Resolución

$$35^\circ + \alpha = 180^\circ$$

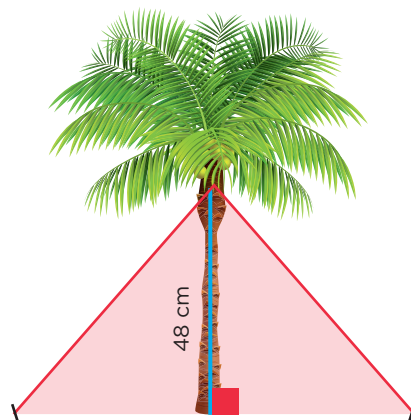
$$\alpha = 145^\circ$$

Luego, tenemos:

$$\beta = 35^\circ$$

$$\phi = \alpha = 145^\circ$$

3. Carlos realiza el cuidado de las palmeras que serán ubicadas en los parques de Lima siguiendo el plan de arborización de la ciudad (Plan Verde), el cual es organizado por la Municipalidad de Lima. Por los fuertes vientos, se ve en la necesidad de sujetar los árboles con cuerdas, como se muestra en la figura. ¿Cuántos centímetros de cuerda comprará, si tiene que sujetar 8 árboles y cada estaca que emplea para sujetar las cuerdas está a 36 cm del pie de la palmera?



- a) 120 cm                      c) 960 cm  
b) 60 cm                        d) 672 cm

4. La profesora Nancy entrega a sus estudiantes las siguientes tarjetas y les pide que relacionen correctamente cada par. Ayuda a realizar las relaciones correctas.



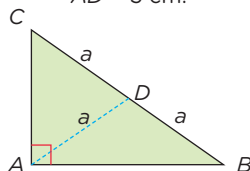
### Recuerda

#### Propiedad de la mediana relativa a la hipotenusa

En todo triángulo rectángulo, la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

#### Ejemplo

En el  $\triangle BAC$ , si  $CB = 10$  cm,  $AD = 5$  cm.

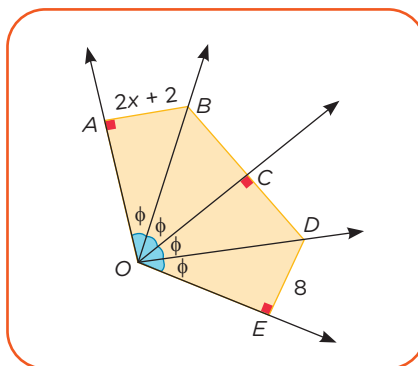
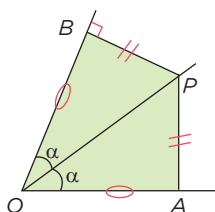


#### Propiedad de la bisectriz

Los puntos de la bisectriz de un ángulo se encuentran a la misma distancia de los lados del mismo.

#### Ejemplo

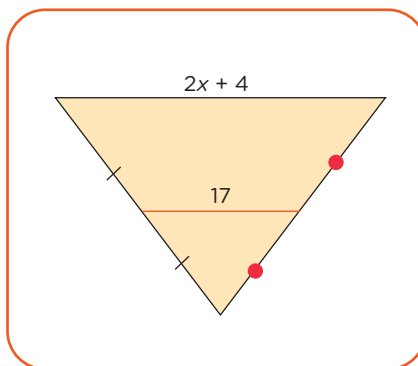
En la figura, si  $BP = 3$  cm, entonces  $PA = 3$  cm.



$$\frac{2x + 4}{2} = 17$$

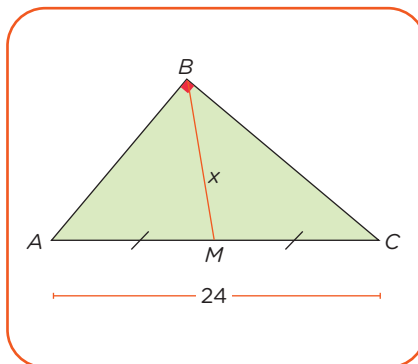
$$x = 15$$

Propiedad de la base media



$$x = 12$$

Propiedad de la mediana relativa a la hipotenusa

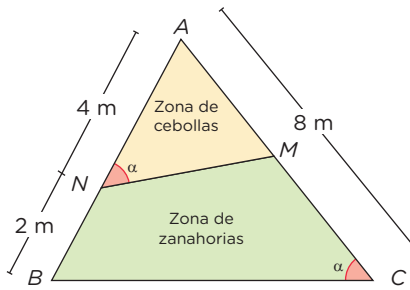


$$2x + 2 = 8$$

$$x = 3$$

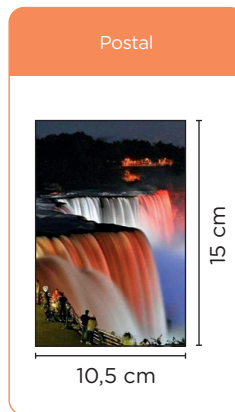
Propiedad de la bisectriz

5. En un terreno con forma triangular, como el que se muestra en la figura, se coloca un cerco para dividir la zona de cebollas rojas y la zona de zanahorias. ¿Cuántos metros de malla se necesitan para cercar toda la zona de cebollas rojas, si la medida de  $MN$  es el doble de  $AM$ ?



- a) 40 m      b) 16 m      c) 13 m      d) 10 m

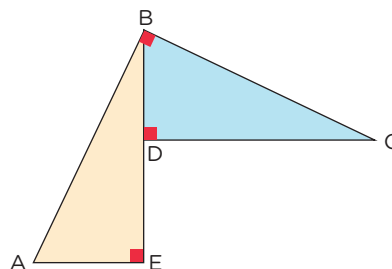
6. El Club de Fotografía del Perú (CFP) ofrece cursos y talleres de Fotografía Básica, Fotografía de Viaje, Fotografía de Paisaje, Retrato, Retrato de Familia, Edición de Fotografías, etc. El encargado de impartir el curso de Fotografía Básica indica que el tamaño de una foto de  $10,5 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$  se llama tamaño postal. ¿Cuáles de las siguientes ampliaciones o reducciones de este tipo de fotografía, realizadas por seis participantes, no tuvieron distorsión? Justifica tu respuesta.



Ancho $\times$ largo (en cm)					
21 $\times$ 30	5,25 $\times$ 7,5	21 $\times$ 7,5	4,6 $\times$ 6	15,75 $\times$ 22,5	12 $\times$ 8

7. Los organizadores de un campeonato de motocrós diseñan un nuevo recorrido en Chilca y presentan la siguiente propuesta: las distancias que deben recorrer los participantes en los tramos  $AB$  y  $BC$  son iguales, y los tramos  $CD$  y  $DE$  miden 100 m y 60 m, respectivamente. ¿Cuál es la distancia que se recorre en el último tramo si se parte del punto A?

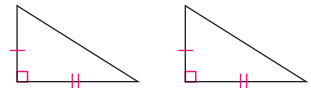
- a) 160 m  
b) 40 m  
c) 60 m  
d) 100 m



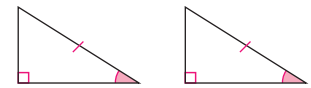
### Ten en cuenta

En los triángulos rectángulos podemos considerar los siguientes criterios de congruencia:

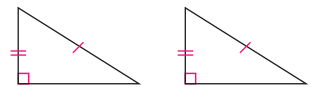
#### Cateto-cateto



#### Hipotenusa-ángulo

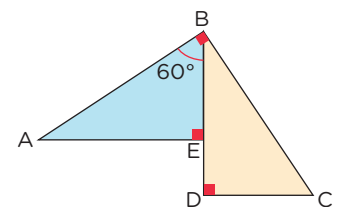


#### Hipotenusa-cateto



#### Ejemplo

¿Los triángulos  $ABE$  y  $BCD$  son congruentes?

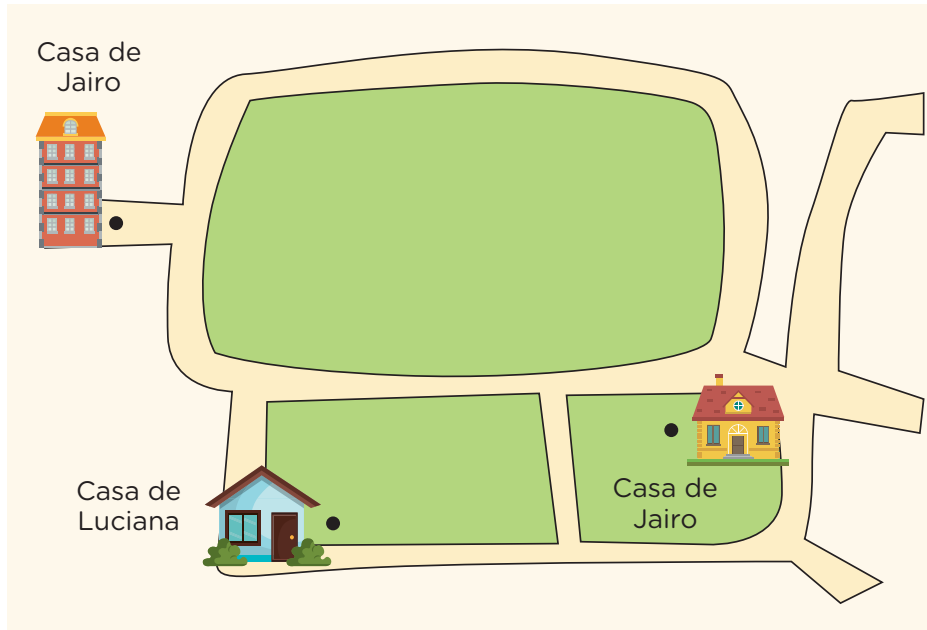


#### Resolución

$$\begin{aligned} m\angle ABE + m\angle DBC &= 90^\circ \\ &\rightarrow m\angle DBC = 30^\circ \\ m\angle ABE + m\angle BAE &= 90^\circ \\ &\rightarrow m\angle BAE = 30^\circ \\ m\angle DBC + m\angle BCD &= 90^\circ \\ &\rightarrow m\angle BCD = 60^\circ \end{aligned}$$

No se puede garantizar que los triángulos  $ABE$  y  $BCD$  son congruentes, solo que son semejantes.

8. La representación gráfica mostrada es el croquis de un pequeño pueblo donde viven tres amigos: Jairo, Salvador y Luciana. Determina en dicho croquis un punto que represente la ubicación de la escuela a la que asisten, si se sabe que es equidistante a las casas de los tres amigos.



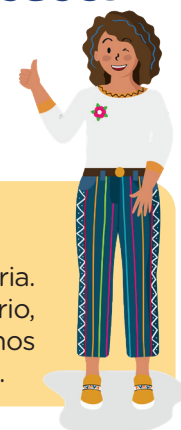
## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Leí textos o gráficos que describen formas geométricas, sus propiedades y relaciones de semejanza y congruencia entre triángulos.			
Establecí relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos, basándome en semejanzas y congruencias.			
Seleccioné diversas estrategias para establecer relaciones métricas entre los lados de un triángulo.			
Planteé afirmaciones sobre las relaciones y propiedades entre objetos y formas geométricas, y comprobé su validez.			



## ¿Cómo el cálculo y la interpretación de probabilidades nos ayudan a predecir resultados?



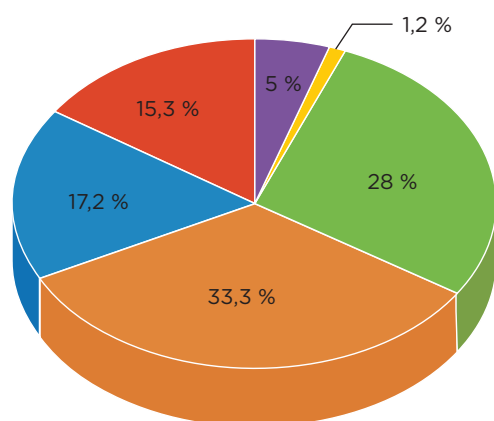
### Construimos nuestros aprendizajes

#### Propósito

Determinamos las condiciones y el espacio muestral de una situación aleatoria. Representamos la probabilidad de un suceso a través de su valor decimal o fraccionario, y determinamos si un suceso es probable o muy probable que ocurra. Seleccionamos y empleamos procedimientos para hallar la probabilidad de una situación aleatoria.

#### Una visita al museo

La siguiente gráfica muestra la edad de un grupo de personas que entró al Museo de la Nación de Lima cierto domingo del mes de julio.



Total: 261 personas



Fuente: Ministerio de Cultura

Anita debe realizar las fotografías promocionales del museo y decide escoger entre los asistentes a los modelos de esta campaña.

- ¿Cuál es la probabilidad que tiene Anita dentro del Museo de la Nación para encontrar una persona cuya edad sea mayor o igual que 35 años? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué es más probable, hallar una persona de 25 a 54 años o una persona que sea menor de edad?

Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 8.



## Comprendemos el problema

1. ¿Cuántas personas asistieron al museo aquel domingo?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. ¿Cuántas personas de 25 a 54 años ingresaron al museo ese día?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. ¿Cuántas personas de 35 años había?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

4. ¿Cuántas personas menores de edad acudieron en total?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

5. ¿Qué te pide la situación?


## Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

6. Observa el siguiente ejemplo. Se tiene una urna donde hay diez bolillas: tres rojas, cuatro azules y el resto amarillas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolilla amarilla?

### Resolución

Suceso A: Sacar una bolilla amarilla.  
 N.º de casos favorables al suceso A:  $10 - 3 - 4 = 3$   
 N.º de casos posibles: 10  
 Luego, calculamos la probabilidad de sacar una bolilla amarilla:

$$P(A) = \frac{\text{N.º de casos favorables}}{\text{N.º de casos posibles}} = \frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$$

**Respuesta:** La probabilidad de sacar una bolilla amarilla es del 30 %.

7. Analiza la siguiente situación: al lanzar un dado, ¿qué es más probable, sacar 6 o sacar 1?

Suceso A: Sacar un 6. N.º de casos favorables A: 1 N.º de casos posibles: 6 Luego, calculamos la probabilidad de sacar un 6: $P(A) = \frac{\text{N.º de casos favorables}}{\text{N.º de casos posibles}} = \frac{1}{6} \approx 0,17$	Suceso B: Sacar un 1. N.º de casos favorables B: 1 N.º de casos posibles: 6 Luego, calculamos la probabilidad de sacar un 1: $P(B) = \frac{\text{N.º de casos favorables}}{\text{N.º de casos posibles}} = \frac{1}{6} \approx 0,17$
--	--

**Respuesta:** La probabilidad de sacar 6 o sacar 1 en un lanzamiento de dado es la misma, y es aproximadamente 17 %.



## Ten en cuenta

**Experimento aleatorio**  
 Un experimento es aleatorio cuando su resultado no se puede saber con total seguridad antes de su realización.

**Espacio muestral ( $\Omega$ )**  
 El conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio es el espacio muestral.

**Suceso**  
 Un suceso es un conjunto formado por algunos de estos resultados, el cual cumple cierta característica.

**Ejemplo**  
 Considera el experimento aleatorio de lanzar un dado.  
 Espacio muestral:  
 $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$   
 Suceso A: Que salga un número par.  
 $A = \{2; 4; 6\}$

## Ejecutamos la estrategia o plan

8. Se denomina cardinal ( $n$ ) de un conjunto al número de elementos diferentes que tiene dicho conjunto. Entonces, dado el suceso  $A$ , calcula el cardinal  $n(A)$ .  
Suceso  $A$ : Hallar una persona que asistió al Museo de la Nación cuya edad es mayor o igual que 35 años.

$$n(A) = \boxed{\phantom{0000}}$$

9. Calcula la probabilidad de  $A$ , aplicando la regla de Laplace, y responde la primera pregunta de la situación.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} = \boxed{\phantom{0.00}}$$


10. Suceso  $B$ : Hallar una persona que asistió al Museo de la Nación cuya edad va desde los 25 hasta los 54 años. Calcula el cardinal  $n(B)$ .

$$n(B) = \boxed{\phantom{0000}}$$

11. Determina la probabilidad de  $B$ .

$$n(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} = \boxed{\phantom{0.00}}$$

12. Suceso  $C$ : Hallar una persona que asistió al Museo de la Nación y que es menor de edad. Calcula el cardinal  $n(C)$ .

$$n(C) = \boxed{\phantom{0000}}$$

13. Determina la probabilidad de  $C$ .

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} \approx 0,06$$

14. Según las respuestas de las preguntas 11 y 13, responde la segunda pregunta de la situación.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## Reflexionamos sobre el desarrollo

15. ¿La probabilidad solo puede ser expresada como una fracción? Justifica tu respuesta y da algunos ejemplos.


16. La probabilidad de un suceso, ¿puede ser 1? Si es así, redacta un ejemplo donde se evidencie ello.




## Recuerda

### Regla de Laplace

La probabilidad de un suceso  $A$ , denotada  $P(A)$ , es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{N.^{\circ} \text{ de casos favorables}}{N.^{\circ} \text{ de casos posibles}}$$

### Ejemplo

Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que ambos resultados sean iguales?

### Resolución

Determinamos el espacio muestral:

$\Omega = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (4; 6), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)\}$

Hallamos el número de casos posibles:  
 $n(\Omega) = 36$

Determinamos  $A$ , donde:  
Suceso  $A$ :

Obtener resultados iguales.  
 $A = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6)\}$

Hallamos el número de casos favorables:  
 $n(A) = 6$

Calculamos la probabilidad de  $A$ :

$$P(A) = \frac{N.^{\circ} \text{ de casos favorables}}{N.^{\circ} \text{ de casos posibles}}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} \approx 0,17$$

$$P(A) \approx 17 \%$$

Por tanto, la probabilidad de que al lanzar dos dados obtengamos resultados iguales es, aproximadamente, 17 %.



## Comprobamos nuestros aprendizajes



### Propósito

Expresamos con diversas representaciones el valor de la probabilidad de sucesos independientes y dependientes de una situación aleatoria; asimismo, planteamos afirmaciones sobre sucesos aleatorios y las justificamos. Además, reconocemos errores en nuestras justificaciones y los corregimos.

### Situación A: Elegimos el menú

Por el cumpleaños de uno de sus hijos, la familia Salazar Pérez acude al restaurante Sabor & Color y observa el menú del día en el cartel de la derecha. Lo peculiar de este restaurante es que uno tiene que pedir su menú al azar, es decir, existen tres cajas con papelitos que contienen los nombres de las entradas, segundos y postres.

¿Cuál es la probabilidad de escoger al azar un menú cuya entrada incluya una ensalada y cuyo segundo sea filete de pollo?

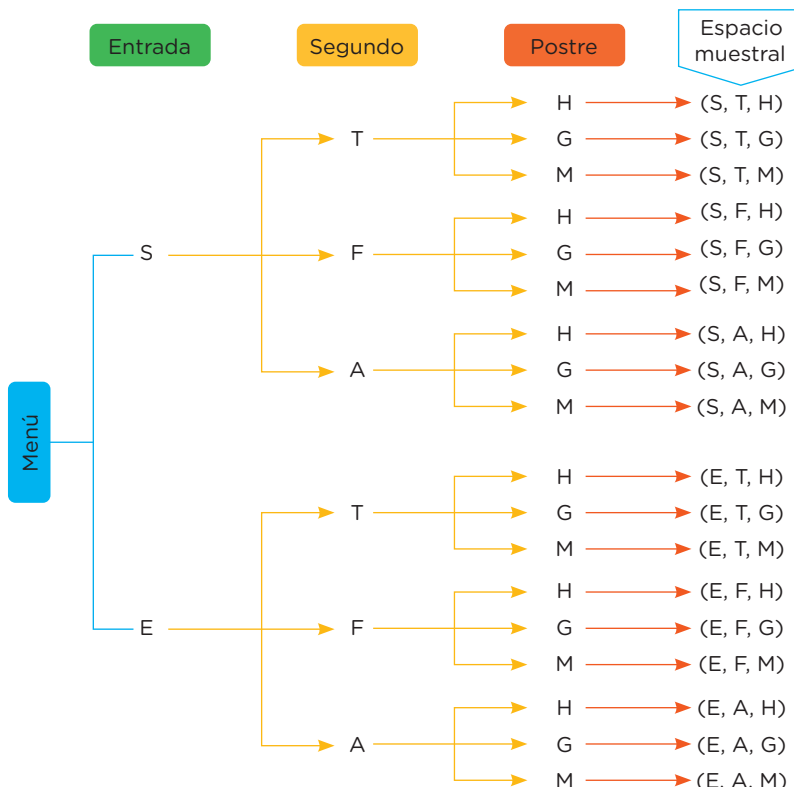


Menú	
*** restaurant ***	
Entrada:	Sopa de casa (S) Ensalada (E)
Segundo:	Tallarines verdes (T) Filete de pollo (F) Ají de gallina (A)
Postre:	Helado (H) Gelatina (G) Mazamorra (M)

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

Determinamos el espacio muestral aplicando la estrategia del **diagrama de árbol**:

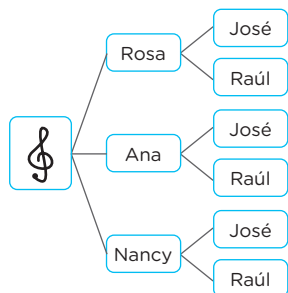


### Glosario

El **diagrama de árbol** es una estrategia heurística que se suele utilizar en conteos de casos posibles o para hacer listas sistemáticas.

#### Ejemplo

Un productor de cumbia quiere armar un dúo mixto (varón y mujer). Puede elegir entre 3 cantantes mujeres y 2 cantantes varones. ¿Cuántos dúos mixtos diferentes puede formar?



**Respuesta:** Se podrán formar 6 dúos mixtos.



Estas 18 combinaciones constituyen el espacio muestral.

$\Omega = \{(S, T, H), (S, T, G), (S, T, M), (S, F, H), (S, F, G), (S, F, M), (S, A, H), (S, A, G), (S, A, M), (E, T, H), (E, T, G), (E, T, M), (E, F, H), (E, F, G), (E, F, M), (E, A, H), (E, A, G), (E, A, M)\}$

Que la entrada sea ensalada y el segundo sea filete de pollo son dos sucesos independientes.

Determinamos la probabilidad de cada suceso:

- Suceso A: Que la entrada sea ensalada.  
N.º de casos favorables al suceso A: 9  
N.º de casos posibles: 18  
Luego, la probabilidad de escoger la ensalada como entrada es:

$$P(A) = \frac{\text{N.º de casos favorables}}{\text{N.º de casos posibles}}$$

$$P(A) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

- Suceso B: Que el segundo sea filete de pollo.  
N.º de casos favorables al suceso B: 6  
N.º de casos posibles: 18  
Luego, la probabilidad de escoger el filete de pollo es:

$$P(B) = \frac{\text{N.º de casos favorables}}{\text{N.º de casos posibles}}$$

$$P(B) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la probabilidad de escoger al azar un menú cuya entrada sea la ensalada y cuyo segundo sea el filete de pollo es:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

**Ahora, respondemos las siguientes preguntas:**

- ¿Habrá otra manera de resolver para dar respuesta a la pregunta de la situación? Explica.


- ¿Cuál es la probabilidad de escoger como postre un helado?


- Si uno de los integrantes de la familia toma la decisión de servirse un solo plato, ¿es más probable que escoja una mazamorra o una sopa de casa? Justifica tu respuesta.




## Ten en cuenta

Dos sucesos son independientes cuando la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro. La probabilidad de que ocurran ambos sucesos se calcula multiplicando la probabilidad de cada uno.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

### Ejemplo

De una baraja de 52 cartas, se extraen dos en forma sucesiva y con reposición (es decir, reponiendo la carta seleccionada en la primera extracción). Calcula la probabilidad de que ambas cartas sean ases.

### Resolución

Suceso A: Obtener un as al extraer la primera carta.  
Suceso B: Obtener un as al extraer la segunda carta.

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

$$P(B) = \frac{4}{52} \text{ (se repuso la carta)}$$

Luego:

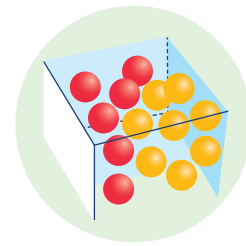
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{52}$$

$$= \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$$

### Situación B: ¿Qué color de esfera saldrá?

La profesora Liz lleva en una urna 14 esferas, de las cuales 8 son de color amarillo y el resto de color rojo. Uno de los estudiantes del tercer grado extrae sin ver dos esferas, una por una. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas esferas sean de color amarillo?

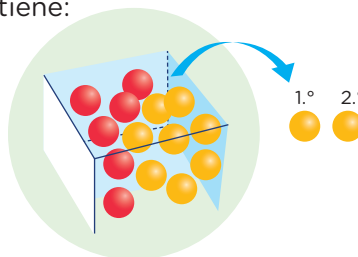


A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

#### Resolución

Al extraer las esferas una por una, se entiende que se realiza en forma sucesiva y sin reposición, por lo que se trata de una probabilidad de sucesos dependientes.

Del enunciado, se tiene:



- Suceso A: Que la primera esfera extraída sea amarilla.

N.º de casos favorables al suceso A: 8  
N.º de casos posibles: 14

$$P(A) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

- Suceso B/A: Que la siguiente esfera sea amarilla, habiendo salido una amarilla en la primera extracción.

N.º de casos favorables al suceso B/A: 7  
N.º de casos posibles: 13

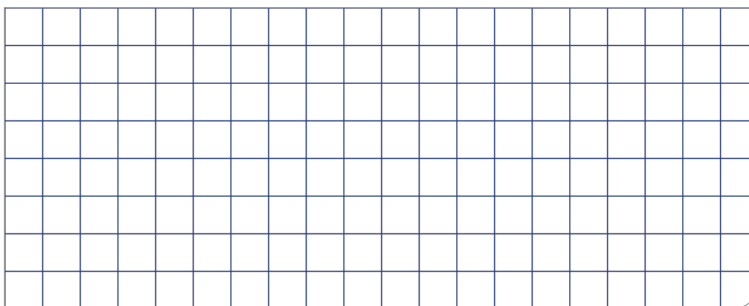
$$P(B/A) = \frac{7}{13} \text{ (sin reposición)}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que ambas esferas sean de color amarillo es:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = \frac{4}{7} \times \frac{7}{13} = \frac{4}{13}$$

Ahora, respondemos la siguiente pregunta:

- La profesora le propone a una estudiante el juego de la situación B. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos esferas, una por una sin reposición, ambas sean de color rojo? Justifica tu respuesta.



#### Ten en cuenta

Dos sucesos son dependientes cuando el resultado del primero influye en la probabilidad del segundo. En este caso, la probabilidad se calcula multiplicando la probabilidad del primer suceso por la probabilidad del segundo suceso, habiendo ocurrido el primero.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

#### Ejemplo

De una baraja de 52 cartas, se extraen dos en forma sucesiva y sin reposición. Calcula la probabilidad de que ambas cartas sean ases.

#### Resolución

Suceso A: Obtener un as en la primera extracción.

Suceso B/A: Obtener un as en la segunda extracción, habiendo sacado un as en la primera.

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

$$P(B/A) = \frac{3}{51} \text{ (sin reposición)}$$

Luego:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$



## Aprendemos a partir del error

### Situación C: Problemas mecánicos

En el taller de mecánica de Manuel se debe agendar previamente una cita para ser atendido. El día lunes, la disponibilidad de atención es la siguiente:

Mañana	Tarde
5 autos para problemas eléctricos	3 autos para problemas eléctricos
6 autos para problemas mecánicos	9 autos para problemas mecánicos
3 autos para planchado	4 autos para planchado



Fuente: Freepik

Si Manuel recibe la primera llamada de un cliente para separar una cita, se desea saber:

- ¿Cuál es la probabilidad de que la llamada recibida sea de un cliente que quiera atenderse por la tarde?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la llamada recibida sea de un cliente que tenga problemas mecánicos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la llamada recibida sea de un cliente que quiera arreglar su auto en la mañana y no tenga problemas eléctricos?

Analizamos los procedimientos planteados para encontrar el error.

### Resolución

Ordenamos los datos en una tabla:

Problema \ Turno	Eléctrico	Mecánico	Planchado	Total
Mañana	5	6	3	14
Tarde	3	9	4	16
<b>Total</b>	8	15	7	30

- Calculamos la probabilidad de que un automóvil se atienda por la tarde:

Suceso  $T$ : El automóvil se atiende por la tarde.

N.º de casos favorables al suceso  $T$ : 16

N.º de casos posibles: 30

$$P(T) = \frac{\text{N.º de casos favorables}}{\text{N.º de casos posibles}} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

- Calculamos la probabilidad de que un automóvil se atienda por problemas mecánicos.

Suceso  $M$ : El automóvil se atiende por problemas mecánicos.

N.º de casos favorables al suceso  $M$ : 15

N.º de casos posibles: 30

$$P(M) = \frac{\text{N.º de casos favorables}}{\text{N.º de casos posibles}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$



### Ten en cuenta

Hay sucesos que siempre se presentan en un experimento aleatorio:

**Suceso seguro:** Está formado por todos los resultados posibles del experimento. Es el suceso que ocurre siempre y coincide con el espacio muestral.

**Suceso imposible:** Es aquel que no se produce nunca; es decir, que no aparece al realizar el experimento aleatorio.

#### Ejemplo

Considera el experimento de lanzar dos dados.

Suceso seguro: obtener una suma menor que 13.

Suceso imposible: obtener una suma mayor que 13.





## Evaluamos nuestros aprendizajes

### Propósito

Determinamos las condiciones y el espacio muestral de una situación aleatoria. Representamos la probabilidad de un suceso. Seleccionamos y empleamos procedimientos para determinar la probabilidad de una situación aleatoria. Planteamos afirmaciones sobre sucesos aleatorios y las justificamos; reconocemos errores y los corregimos.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

### Elección de estudiantes

La profesora de Comunicación organiza un debate entre las secciones A y B del 3.º de secundaria de un colegio. Ella escribe los nombres de sus estudiantes en tiras de papel y los coloca en una urna, para que su participación sea al azar.

La sección A está conformada por 16 estudiantes varones y 12 mujeres; y la sección B, por 9 estudiantes varones y 15 mujeres. Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.



Fuente: Shutterstock

1. ¿Cuál es la probabilidad de que, al extraer un papelito, este contenga el nombre de un estudiante de la sección A?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que, al extraer un papelito, este contenga un nombre femenino de la sección B?
3. Luego de corregir las evaluaciones de salida de sus estudiantes, la profesora Jennifer registra los resultados en la siguiente tabla:

	A	B
Masculino	16	9
Femenino	12	15

Puntaje	Inicio	En proceso	Satisfactorio
	0-10	11-13	14-20
Cantidad de estudiantes	12	10	8

Al elegir a un estudiante del aula al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga un puntaje satisfactorio?



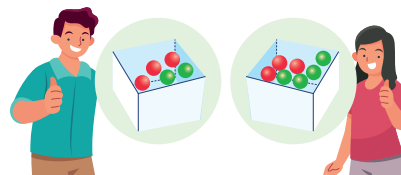
### Ten en cuenta

En la pregunta 3, que un estudiante no tenga un puntaje satisfactorio implica que está en inicio o en proceso.

### Extrayendo bolas de colores

Carlos y Pamela tienen, cada uno, una caja que contiene bolas de color rojo y verde, como se muestra en la figura.

Con la información dada, responde las preguntas 4 y 5.



4. Si Carlos quiere extraer una bola verde, ¿en cuál de las cajas tiene más probabilidad de obtenerla? Expresa tu respuesta aproximada en porcentaje.
5. Carlos y Pamela deciden juntar todas las bolas en una sola caja. Luego, Pamela extrae tres bolas, una por una y sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres bolas sean de color verde?



Fuente: Freepik

6. Renato ahorra sus propinas semanales en una alcancía. Él tiene hasta el momento un total de 30 monedas, entre las que hay cinco de S/1; las demás son de S/2 y S/5. Si la probabilidad de extraer una moneda de S/2 es de 0,6, ¿cuántas monedas de S/5 hay en la alcancía?

7. En una institución educativa, el 45 % de los estudiantes practica fútbol, el 30 % juega básquet y el 20 % practica ambos deportes. Con la información dada, completa la tabla.

	Fútbol	No fútbol	Total
Básquet			
No básquet			
Total			100 %



Fuente: Freepik

8. Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no juegue fútbol ni básquet?

## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Representé la probabilidad de un suceso a través de su valor decimal o fraccionario.			
Seleccioné y empleé procedimientos para determinar la probabilidad de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace y sus propiedades.			
Expresé el valor de la probabilidad de sucesos independientes y dependientes de una situación aleatoria.			
Planteé afirmaciones sobre experimentos aleatorios y las justifiqué.			

# Enfoques

## transversales

### Enfoque Ambiental



Busca formar personas conscientes del cuidado del ambiente, que promuevan el desarrollo de estilos de vida saludables y sostenibles.

### Enfoque Inclusivo o de Atención a la Diversidad



Busca reconocer y valorar a todas las personas por igual, con el fin de erradicar la exclusión, discriminación y desigualdad de oportunidades.

### Enfoque de Derechos



Fomenta el reconocimiento de los derechos y deberes; asimismo, promueve el diálogo, la participación y la democracia.

### Enfoque Igualdad de Género



Busca brindar las mismas oportunidades a hombres y mujeres, eliminando situaciones que generan desigualdades entre ellos.

Son los valores y actitudes que tenemos al relacionarnos con otras personas y con nuestro entorno, con el fin de generar una sociedad más justa, inclusiva y equitativa para todos.

### Enfoque Intercultural



Promueve el intercambio de ideas y experiencias entre las distintas formas de ver el mundo.

### Enfoque Búsqueda de la Excelencia



Incentiva a los estudiantes a dar lo mejor de sí mismos para alcanzar sus metas y contribuir con su comunidad.

### Enfoque Orientación al Bien Común



Busca que el conocimiento, los valores y la educación sean bienes que todos compartimos, promoviendo relaciones solidarias en comunidad.



# CARTA DEMOCRÁTICA INTERAMERICANA

## I La democracia y el sistema interamericano

### Artículo 1

Los pueblos de América tienen derecho a la democracia y sus gobiernos la obligación de promoverla y defenderla.

La democracia es esencial para el desarrollo social, político y económico de los pueblos de las Américas.

### Artículo 2

El ejercicio efectivo de la democracia representativa es la base del estado de derecho y los regímenes constitucionales de los Estados Miembros de la Organización de los Estados Americanos. La democracia representativa se refuerza y profundiza con la participación permanente, ética y responsable de la ciudadanía en un marco de legalidad conforme al respectivo orden constitucional.

### Artículo 3

Son elementos esenciales de la democracia representativa, entre otros, el respeto a los derechos humanos y las libertades fundamentales; el acceso al poder y su ejercicio con sujeción al estado de derecho; la celebración de elecciones periódicas, libres, justas y basadas en el sufragio universal y secreto como expresión de la soberanía del pueblo; el régimen plural de partidos y organizaciones políticas; y la separación e independencia de los poderes públicos.

### Artículo 4

Son componentes fundamentales del ejercicio de la democracia la transparencia de las actividades gubernamentales, la probidad, la responsabilidad de los gobiernos en la gestión pública, el respeto por los derechos sociales y la libertad de expresión y de prensa.

La subordinación constitucional de todas las instituciones del Estado a la autoridad civil legalmente constituida y el respeto al estado de derecho de todas las entidades y sectores de la sociedad son igualmente fundamentales para la democracia.

### Artículo 5

El fortalecimiento de los partidos y de otras organizaciones políticas es prioritario para la democracia. Se deberá prestar atención especial a la problemática derivada de los altos costos de las campañas electorales y al establecimiento de un régimen equilibrado y transparente de sus actividades.

### Artículo 6

La participación de la ciudadanía en las decisiones relativas a su propio desarrollo es un derecho y una responsabilidad. Es también una condición necesaria para el pleno y efectivo ejercicio de la democracia. Promover y fomentar diversas formas de participación fortalece la democracia.

## II

### La democracia y los derechos humanos

### Artículo 7

La democracia es indispensable para el ejercicio efectivo de las libertades fundamentales y los derechos humanos, en su carácter universal, indivisible e interdependiente, consagrados en las respectivas constituciones de los Estados y en los instrumentos interamericanos e internacionales de derechos humanos.

### Artículo 8

Cualquier persona o grupo de personas que consideren que sus derechos humanos han sido violados pueden interponer denuncias o peticiones ante el sistema interamericano de promoción y protección de los derechos humanos conforme a los procedimientos establecidos en el mismo.

Los Estados Miembros reafirman su intención de fortalecer el sistema interamericano de protección de los derechos humanos para la consolidación de la democracia en el Hemisferio.

### Artículo 9

La eliminación de toda forma de discriminación, especialmente la discriminación de género, étnica y racial, y de las diversas formas de intolerancia, así como la promoción y protección de los derechos humanos de los pueblos indígenas y los migrantes y el respeto a la diversidad étnica, cultural y religiosa en las Américas, contribuyen al fortalecimiento de la democracia y la participación ciudadana.

### Artículo 10

La promoción y el fortalecimiento de la democracia requieren el ejercicio pleno y eficaz de los derechos de los trabajadores y la aplicación de normas laborales básicas, tal como están consagradas en la Declaración de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) relativa a los Principios y Derechos Fundamentales en el Trabajo y su Seguimiento, adoptada en 1998, así como en otras convenciones básicas afines de la OIT. La democracia se fortalece con el mejoramiento de las condiciones laborales y la calidad de vida de los trabajadores del Hemisferio.

## III

### Democracia, desarrollo integral y combate a la pobreza

### Artículo 11

La democracia y el desarrollo económico y social son interdependientes y se refuerzan mutuamente.

### Artículo 12

La pobreza, el analfabetismo y los bajos niveles de desarrollo humano son factores que inciden negativamente en la consolidación de la democracia. Los Estados Miembros de la OEA se comprometen a adoptar y ejecutar todas las acciones necesarias para la creación de empleo productivo, la reducción de la pobreza y la erradicación de la pobreza extrema, teniendo en cuenta las diferentes realidades y condiciones económicas de los países del Hemisferio. Este compromiso común frente a los problemas del desarrollo y la pobreza también destaca la importancia de mantener los equilibrios macroeconómicos y el imperativo de fortalecer la cohesión social y la democracia.

### Artículo 13

La promoción y observancia de los derechos económicos, sociales y culturales son consustanciales al desarrollo integral, al crecimiento económico con equidad y a la consolidación de la democracia en los Estados del Hemisferio.

### Artículo 14

Los Estados Miembros acuerdan examinar periódicamente las acciones adoptadas y ejecutadas por la Organización encaminadas a fomentar el diálogo, la cooperación para el desarrollo integral y el combate a la pobreza en el Hemisferio, y tomar las medidas oportunas para promover estos objetivos.

### Artículo 15

El ejercicio de la democracia facilita la preservación y el manejo adecuado del medio ambiente. Es esencial que los Estados del Hemisferio implementen políticas y estrategias de protección del medio ambiente, respetando los diversos tratados y convenciones, para lograr un desarrollo sostenible en beneficio de las futuras generaciones.

### Artículo 16

La educación es clave para fortalecer las instituciones democráticas, promover el desarrollo del potencial humano y el alivio de la pobreza y fomentar un mayor entendimiento entre los pueblos. Para lograr estas metas, es esencial que una educación de calidad esté al alcance de todos, incluyendo a las niñas y las mujeres, los habitantes de las zonas rurales y las personas que pertenecen a las minorías.

## IV

### Fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática

### Artículo 17

Cuando el gobierno de un Estado Miembro considere que está en riesgo su proceso político institucional

democrático o su legítimo ejercicio del poder, podrá recurrir al Secretario General o al Consejo Permanente a fin de solicitar asistencia para el fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática.

### Artículo 18

Cuando en un Estado Miembro se produzcan situaciones que pudieran afectar el desarrollo del proceso político institucional democrático o el legítimo ejercicio del poder, el Secretario General o el Consejo Permanente podrá, con el consentimiento previo del gobierno afectado, disponer visitas y otras gestiones con la finalidad de hacer un análisis de la situación. El Secretario General elevará un informe al Consejo Permanente, y éste realizará una apreciación colectiva de la situación y, en caso necesario, podrá adoptar decisiones dirigidas a la preservación de la institucionalidad democrática y su fortalecimiento.

### Artículo 19

Basado en los principios de la Carta de la OEA y con sujeción a sus normas, y en concordancia con la cláusula democrática contenida en la Declaración de la ciudad de Quebec, la ruptura del orden democrático o una alteración del orden constitucional que afecte gravemente el orden democrático en un Estado Miembro constituye, mientras persista, un obstáculo insuperable para la participación de su gobierno en las sesiones de la Asamblea General, de la Reunión de Consulta, de los Consejos de la Organización y de las conferencias especializadas, de las comisiones, grupos de trabajo y demás órganos de la Organización.

### Artículo 20

En caso de que en un Estado Miembro se produzca una alteración del orden constitucional que afecte gravemente su orden democrático, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá solicitar la convocatoria inmediata del Consejo Permanente para realizar una apreciación colectiva de la situación y adoptar las decisiones que estime conveniente.

El Consejo Permanente, según la situación, podrá disponer la realización de las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Si las gestiones diplomáticas resultaren infructuosas o si la urgencia del caso lo aconsejare, el Consejo Permanente convocará de inmediato un período extraordinario de sesiones de la Asamblea General para que ésta adopte las decisiones que estime apropiadas, incluyendo gestiones diplomáticas, conforme a la Carta de la Organización, el derecho internacional y las disposiciones de la presente Carta Democrática.

Durante el proceso se realizarán las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

### Artículo 21

Cuando la Asamblea General, convocada a un período extraordinario de sesiones, constate que se ha producido la ruptura del orden democrático en un Estado Miembro y que las gestiones diplomáticas han sido infructuosas, conforme a la Carta de la OEA tomará la decisión de suspender a dicho Estado Miembro del ejercicio de su derecho de participación en la OEA con el voto afirmativo de los dos tercios de los Estados Miembros. La suspensión entrará en vigor de inmediato.

El Estado Miembro que hubiera sido objeto de suspensión deberá continuar observando el cumplimiento de sus obligaciones como miembro de la Organización, en particular en materia de derechos humanos.

Adoptada la decisión de suspender a un gobierno, la Organización mantendrá sus gestiones diplomáticas para el restablecimiento de la democracia en el Estado Miembro afectado.

### Artículo 22

Una vez superada la situación que motivó la suspensión, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá proponer a la Asamblea General el levantamiento de la suspensión. Esta decisión se adoptará por el voto de los dos tercios de los Estados Miembros, de acuerdo con la Carta de la OEA.

## V

### La democracia y las misiones de observación electoral

### Artículo 23

Los Estados Miembros son los responsables de organizar, llevar a cabo y garantizar procesos electorales libres y justos.

Los Estados Miembros, en ejercicio de su soberanía, podrán solicitar a la OEA asesoramiento o asistencia para el fortalecimiento y desarrollo de sus instituciones y procesos electorales, incluido el envío de misiones preliminares para ese propósito.

### Artículo 24

Las misiones de observación electoral se llevarán a cabo por solicitud del Estado Miembro interesado. Con tal finalidad, el gobierno de dicho Estado y el Secretario General celebrarán un convenio que determine el alcance y la cobertura de la misión de observación electoral de que se trate. El Estado Miembro deberá garantizar las condiciones de seguridad, libre acceso a la información y amplia cooperación con la misión de observación electoral.

Las misiones de observación electoral se realizarán de conformidad con los principios y normas de la OEA. La Organización deberá asegurar la eficacia e independencia de estas misiones, para lo cual se las dotará de los recursos necesarios. Las mismas se realizarán de forma objetiva, imparcial y transparente, y con la capacidad técnica apropiada.

Las misiones de observación electoral presentarán oportunamente al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, los informes sobre sus actividades.

### Artículo 25

Las misiones de observación electoral deberán informar al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, si no existiesen las condiciones necesarias para la realización de elecciones libres y justas.

La OEA podrá enviar, con el acuerdo del Estado interesado, misiones especiales a fin de contribuir a crear o mejorar dichas condiciones.

## VI

### Promoción de la cultura democrática

### Artículo 26

La OEA continuará desarrollando programas y actividades dirigidos a promover los principios y prácticas democráticas y fortalecer la cultura democrática en el Hemisferio, considerando que la democracia es un sistema de vida fundado en la libertad y el mejoramiento económico, social y cultural de los pueblos. La OEA mantendrá consultas y cooperación continua con los Estados Miembros, tomando en cuenta los aportes de organizaciones de la sociedad civil que trabajen en esos ámbitos.

### Artículo 27

Los programas y actividades se dirigirán a promover la gobernabilidad, la buena gestión, los valores democráticos y el fortalecimiento de la institucionalidad política y de las organizaciones de la sociedad civil. Se prestará atención especial al desarrollo de programas y actividades para la educación de la niñez y la juventud como forma de asegurar la permanencia de los valores democráticos, incluidas la libertad y la justicia social.

### Artículo 28

Los Estados promoverán la plena e igualitaria participación de la mujer en las estructuras políticas de sus respectivos países como elemento fundamental para la promoción y ejercicio de la cultura democrática.



## EL ACUERDO NACIONAL

El 22 de julio de 2002, los representantes de las organizaciones políticas, religiosas, del Gobierno y de la sociedad civil firmaron el compromiso de trabajar, todos, para conseguir el bienestar y desarrollo del país. Este compromiso es el Acuerdo Nacional.

El acuerdo persigue cuatro objetivos fundamentales. Para alcanzarlos, todos los peruanos de buena voluntad tenemos, desde el lugar que ocupemos o el rol que desempeñemos, el deber y la responsabilidad de decidir, ejecutar, vigilar o defender los compromisos asumidos. Estos son tan importantes que serán respetados como políticas permanentes para el futuro.

Por esta razón, como niños, niñas, adolescentes o adultos, ya sea como estudiantes o trabajadores, debemos promover y fortalecer acciones que garanticen el cumplimiento de esos cuatro objetivos que son los siguientes:

### **1. Democracia y Estado de Derecho**

La justicia, la paz y el desarrollo que necesitamos los peruanos sólo se pueden dar si conseguimos una verdadera democracia. El compromiso del Acuerdo Nacional es garantizar una sociedad en la que los derechos son respetados y los ciudadanos viven seguros y expresan con libertad sus opiniones a partir del diálogo abierto y enriquecedor; decidiendo lo mejor para el país.

### **2. Equidad y Justicia Social**

Para poder construir nuestra democracia, es necesario que cada una de las

personas que conformamos esta sociedad, nos sintamos parte de ella. Con este fin, el Acuerdo promoverá el acceso a las oportunidades económicas, sociales, culturales y políticas. Todos los peruanos tenemos derecho a un empleo digno, a una educación de calidad, a una salud integral, a un lugar para vivir. Así, alcanzaremos el desarrollo pleno.

### **3. Competitividad del País**

Para afianzar la economía, el Acuerdo se compromete a fomentar el espíritu de competitividad en las empresas, es decir, mejorar la calidad de los productos y servicios, asegurar el acceso a la formalización de las pequeñas empresas y sumar esfuerzos para fomentar la colocación de nuestros productos en los mercados internacionales.

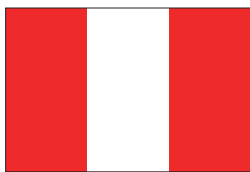
### **4. Estado Eficiente, Transparente y Descentralizado**

Es de vital importancia que el Estado cumpla con sus obligaciones de manera eficiente y transparente para ponerse al servicio de todos los peruanos. El Acuerdo se compromete a modernizar la administración pública, desarrollar instrumentos que eliminen la corrupción o el uso indebido del poder. Asimismo, descentralizar el poder y la economía para asegurar que el Estado sirva a todos los peruanos sin excepción.

Mediante el Acuerdo Nacional nos comprometemos a desarrollar maneras de controlar el cumplimiento de estas políticas de Estado, a brindar apoyo y difundir constantemente sus acciones a la sociedad en general.

# SÍMBOLOS DE LA PATRIA

## Artículo 49 de la Constitución Política del Perú



**BANDERA NACIONAL**



**ESCUDO NACIONAL**

### HIMNO NACIONAL DEL PERÚ

#### CORO

Somos libres, seámoslo siempre,  
y antes niegue sus luces el sol,  
que faltemos al voto solemne  
que la patria al Eterno elevó.

**HIMNO NACIONAL**

## Declaración Universal de los Derechos Humanos

El 10 de diciembre de 1948, la Asamblea General de las Naciones Unidas aprobó y proclamó la Declaración Universal de Derechos Humanos, cuyos artículos figuran a continuación:

### Artículo 1

Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, (...) deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

### Artículo 2

Toda persona tiene los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición. Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona (...).

### Artículo 3

Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

### Artículo 4

Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre; la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.

### Artículo 5

Nadie será sometido a torturas ni a penas o tratos crueles, inhumanos o degradantes.

### Artículo 6

Todo ser humano tiene derecho, en todas partes, al reconocimiento de su personalidad jurídica.

### Artículo 7

Todos son iguales ante la ley y tienen, sin distinción, derecho a igual protección de la ley. Todos tienen derecho a igual protección contra toda discriminación que infrinja esta Declaración (...).

### Artículo 8

Toda persona tiene derecho a un recurso efectivo, ante los tribunales nacionales competentes, que la ampare contra actos que violen sus derechos fundamentales (...).

### Artículo 9

Nadie podrá ser arbitrariamente detenido, preso ni desterrado.

### Artículo 10

Toda persona tiene derecho, en condiciones de plena igualdad, a ser oída públicamente y con justicia por un tribunal independiente e imparcial, para la determinación de sus derechos y obligaciones o para el examen de cualquier acusación contra ella en materia penal.

### Artículo 11

1. Toda persona acusada de delito tiene derecho a que se presuma su inocencia mientras no se pruebe su culpabilidad (...).  
2. Nadie será condenado por actos u omisiones que en el momento de cometerse no fueron delictivos según el Derecho nacional o internacional. Tampoco se impondrá pena más grave que la aplicable en el momento de la comisión del delito.

### Artículo 12

Nadie será objeto de injerencias arbitrarias en su vida privada, su familia, su domicilio o su correspondencia, ni de ataques a su honra o a su reputación. Toda persona tiene derecho a la protección de la ley contra tales injerencias o ataques.

### Artículo 13

1. Toda persona tiene derecho a circular libremente y a elegir su residencia en el territorio de un Estado.  
2. Toda persona tiene derecho a salir de cualquier país, incluso el propio, y a regresar a su país.

### Artículo 14

1. En caso de persecución, toda persona tiene derecho a buscar asilo, y a disfrutar de él, en cualquier país.  
2. Este derecho no podrá ser invocado contra una acción judicial realmente originada por delitos comunes o por actos opuestos a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

### Artículo 15

1. Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.  
2. A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

### Artículo 16

1. Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia (...).  
2. Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.  
3. La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

### Artículo 17

1. Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.  
2. Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

### Artículo 18

Toda persona tiene derecho a la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión (...).

### Artículo 19

Todo individuo tiene derecho a la libertad de opinión y de expresión (...).

### Artículo 20

1. Toda persona tiene derecho a la libertad de reunión y de asociación pacíficas.  
2. Nadie podrá ser obligado a pertenecer a una asociación.

### Artículo 21

1. Toda persona tiene derecho a participar en el gobierno de su país, directamente o por medio de representantes libremente escogidos.  
2. Toda persona tiene el derecho de acceso, en condiciones de igualdad, a las funciones públicas de su país.  
3. La voluntad del pueblo es la base de la autoridad del poder público; esta voluntad se expresará mediante elecciones auténticas que habrán de celebrarse periódicamente, por sufragio universal e igual y por voto secreto u otro procedimiento equivalente que garantice la libertad del voto.

### Artículo 22

Toda persona (...) tiene derecho a la seguridad social, y a obtener (...) habida cuenta de la organización y los recursos de cada Estado, la satisfacción de los derechos económicos, sociales y culturales, indispensables a su dignidad y al libre desarrollo de su personalidad.

### Artículo 23

1. Toda persona tiene derecho al trabajo, a la libre elección de su trabajo, a condiciones equitativas y satisfactorias de trabajo y a la protección contra el desempleo.  
2. Toda persona tiene derecho, sin discriminación alguna, a igual salario por trabajo igual.  
3. Toda persona que trabaja tiene derecho a una remuneración equitativa y satisfactoria, que le asegure, así como a su familia, una existencia conforme a la dignidad humana y que será completada, en caso necesario, por cualesquiera otros medios de protección social.  
4. Toda persona tiene derecho a fundar sindicatos y a sindicarse para la defensa de sus intereses.

### Artículo 24

Toda persona tiene derecho al descanso, al disfrute del tiempo libre, a una limitación razonable de la duración del trabajo y a vacaciones periódicas pagadas.

### Artículo 25

1. Toda persona tiene derecho a un nivel de vida adecuado que le asegure, así como a su familia, la salud y el bienestar, y en especial la alimentación, el vestido, la vivienda, la asistencia médica y los servicios sociales necesarios; tiene asimismo derecho a los seguros en caso de desempleo, enfermedad, invalidez, vejez y otros casos de pérdida de sus medios de subsistencia por circunstancias independientes de su voluntad.  
2. La maternidad y la infancia tienen derecho a cuidados y asistencia especiales. Todos los niños, nacidos de matrimonio o fuera de matrimonio, tienen derecho a igual protección social.

### Artículo 26

1. Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo concerniente a la instrucción elemental y fundamental. La instrucción elemental será obligatoria. La instrucción técnica y profesional habrá de ser generalizada; el acceso a los estudios superiores será igual para todos, en función de los méritos respectivos.  
2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos; y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz.  
3. Los padres tendrán derecho preferente a escoger el tipo de educación que habrá de darse a sus hijos.

### Artículo 27

1. Toda persona tiene derecho a tomar parte libremente en la vida cultural de la comunidad, a gozar de las artes y a participar en el progreso científico y en los beneficios que de él resulten.  
2. Toda persona tiene derecho a la protección de los intereses morales y materiales que le correspondan por razón de las producciones científicas, literarias o artísticas de que sea autora.

### Artículo 28

Toda persona tiene derecho a que se establezca un orden social e internacional en el que los derechos y libertades proclamados en esta Declaración se hagan plenamente efectivos.

### Artículo 29

1. Toda persona tiene deberes respecto a la comunidad (...).  
2. En el ejercicio de sus derechos y en el disfrute de sus libertades, toda persona estará solamente sujeta a las limitaciones establecidas por la ley con el único fin de asegurar el reconocimiento y el respeto de los derechos y libertades de los demás, y de satisfacer las justas exigencias de la moral, del orden público y del bienestar general en una sociedad democrática.  
3. Estos derechos y libertades no podrán en ningún caso ser ejercidos en oposición a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

### Artículo 30

Nada en la presente Declaración podrá interpretarse en el sentido de que confiere derecho alguno al Estado, a un grupo o a una persona, para emprender y desarrollar actividades (...) tendientes a la supresión de cualquiera de los derechos y libertades proclamados en esta Declaración.