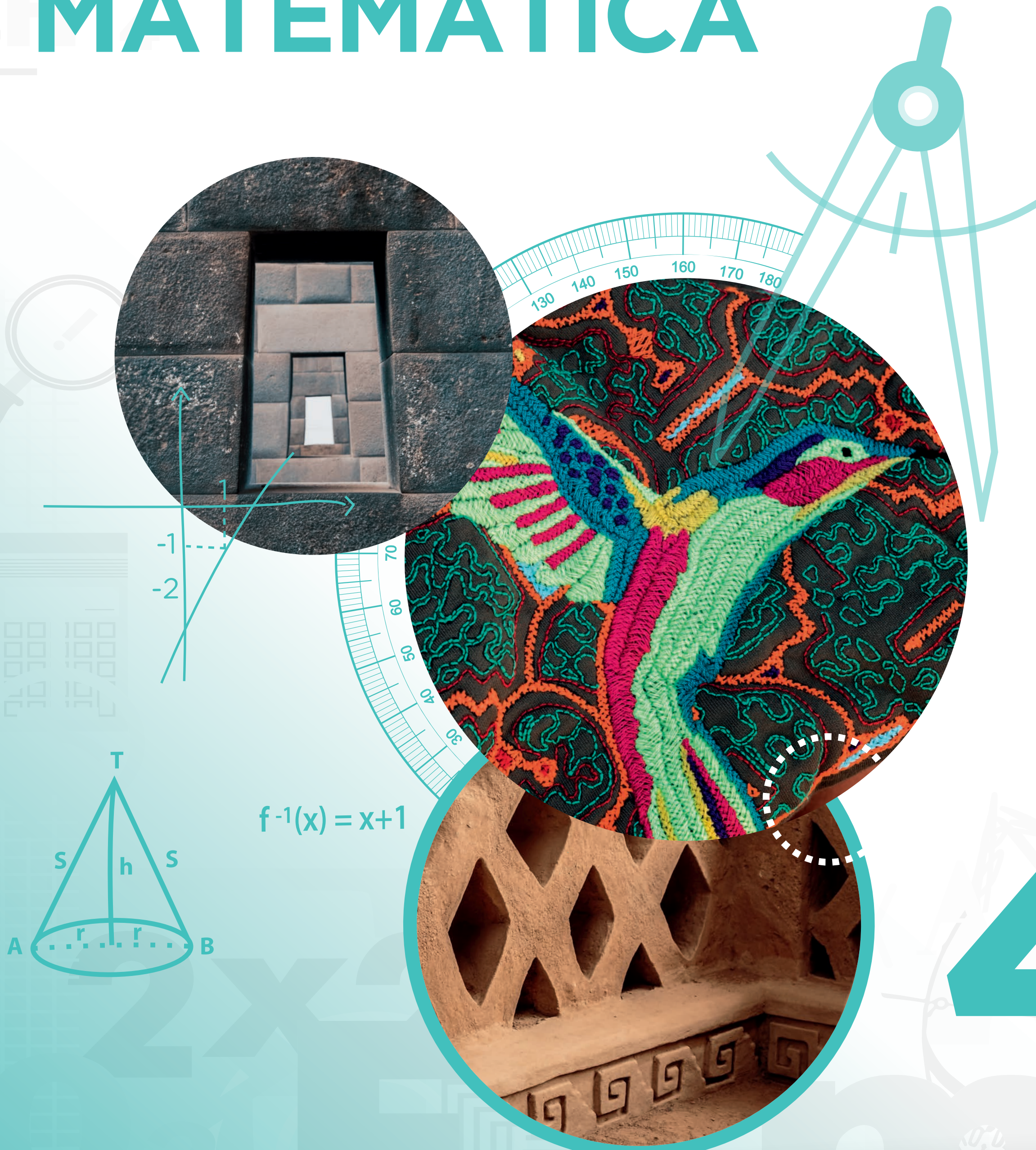
Fichas de MATEMÁTICA



4

REPÚBLICA DEL PERÚ

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

La ciudadana y el ciudadano que queremos

Desarrolla procesos autónomos de aprendizaje.

Se **reconoce** como persona valiosa y se identifica con su cultura en diferentes contextos.

Gestiona proyectos de manera ética.

Interpreta la realidad y toma decisiones con conocimientos matemáticos.

Propicia la vida en democracia comprendiendo los procesos históricos y sociales.

Perfil de egreso

Indaga y comprende el mundo natural y artificial utilizando conocimientos científicos en diálogo con saberes locales.

Se **comunica** en su lengua materna, en castellano como segunda lengua y en inglés como lengua extranjera.

Aprovecha responsablemente las tecnologías.

Comprende y aprecia la dimensión espiritual y religiosa.

Aprecia manifestaciones artístico-culturales y crea proyectos de arte.

Practica una vida activa y saludable.

Currículo Nacional

Fichas de MATEMÁTICA

4

REPÚBLICA DEL PERÚ

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Fichas de Matemática 4

Este material educativo, *Fichas de Matemática 4* para estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria, ha sido elaborado por la Dirección de Educación Secundaria para promover el desarrollo de las competencias “Resuelve problemas de cantidad”, “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”, “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización” y “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” propuestas en el Currículo Nacional de Educación Básica.

Edición
© Ministerio de Educación
Calle Del Comercio N.° 193, San Borja
Lima 15021, Perú
Teléfono: 615-5800
www.minedu.gob.pe

Elaboración de contenidos
Larisa Mansilla Fernández
Olber Muñoz Solís
Juan Carlos Chávez Espino
Hugo Luis Támara Salazar
Hubner Luque Cristóbal Jave
Enrique García Manyari
Liliana Carol Brañes Gutiérrez

Especialista en edición
Oscar Emiliano Palomino Flores

Revisión pedagógica
Juan Carlos Chávez Espino

Diseño y diagramación
Ana Matilde Morales Vásquez
Daniel Zavala Agapito

Corrección de estilo
Marco Antonio Vigo Esqueche
Carlos Alberto Zavala Félix

Primera edición: setiembre de 2017
Segunda edición: junio de 2019
Primera reimpresión: agosto de 2020
Segunda reimpresión: diciembre de 2020
Tercera reimpresión: agosto de 2021
Tercera edición: noviembre de 2022
Cuarta edición: octubre de 2023

Tiraje
495 147 ejemplares

Impresión
Se terminó de imprimir en noviembre de 2023, en los talleres gráficos de Quad/Graphics Perú S.R.L. sito en Av. Los Frutales 344, Urb. Los Artesanos, Ate, Lima-Perú.
RUC N.° 20371828851

Debido a la naturaleza dinámica de internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se hace referencia en este material educativo pueden tener modificaciones o desaparecer.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N.° 2023 - 07501

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

En este material se usan términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor” y sus respectivos plurales, así como las palabras equivalentes en el contexto educativo, para referirse a hombres y mujeres. Esta opción considera la diversidad y respeta el lenguaje inclusivo, y se emplea para promover una lectura fluida y facilitar la comprensión del texto.

PRESENTACIÓN

Estimado:

Nos complace poner en tus manos el material educativo ***Fichas de Matemática 4***, que, estamos seguros, te ayudará a descubrir la presencia de la matemática en la vida cotidiana y a utilizarla de manera adecuada y creativa en la resolución de problemas vinculados a la realidad.

En su estructura, te proponemos algunos ejemplos de estrategias heurísticas para que las puedas emplear en cada una de las fichas, las cuales se encuentran organizadas en tres secciones: *Construimos nuestros aprendizajes, Comprobamos nuestros aprendizajes y Evaluamos nuestros aprendizajes*.

En la primera sección, *Construimos nuestros aprendizajes*, te presentamos una situación relacionada con la vida cotidiana, que será abordada a través de interrogantes que pretenden movilizar tus capacidades y conocimientos, lo cual te ayudará a comprender el problema, diseñar o seleccionar una estrategia o plan, ejecutar la estrategia y reflexionar sobre lo desarrollado. En esta y las demás secciones vas a contar con información, datos, conocimientos, entre otros, que te ayudarán a gestionar tus aprendizajes de manera autónoma.

En la segunda sección, *Comprobamos nuestros aprendizajes*, te planteamos tres situaciones de contexto, en cuyo desarrollo podrás explicar el proceso de resolución, identificando las estrategias y describiendo los procedimientos utilizados. Este análisis te permitirá plantear otros caminos de resolución, así como identificar errores, aprender de estos y realizar tu propia corrección.

En la tercera sección, *Evaluamos nuestros aprendizajes*, te presentamos situaciones de diversos grados de complejidad en contextos variados y apoyadas en gráficos. Al desarrollar las actividades que contienen, podrás medir tu progreso teniendo en cuenta criterios de evaluación conocidos de antemano por ti.

Finalmente, puedes desglosar las fichas para desarrollarlas y organizarlas en tu portafolio, de manera que tu docente te brinde retroalimentación u orientación para que puedas seguir mejorando.

Esperamos que con esta experiencia sientas que hacer matemática es un reto posible de alcanzar. Disfrútala.

Ministerio de Educación

Fuente: Shutterstock

CONTENIDO

CONOCIENDO ALGUNAS ESTRATEGIAS

Un buen resolutor de problemas debe llegar a desarrollar la capacidad de resolver un problema con diversos métodos; además, necesita estar en capacidad de combinar estrategias creativamente. En cada etapa de desarrollo de la solución, debemos definir qué estrategia se utilizará en la siguiente fase.

1. Estrategias de comprensión

Lectura analítica

Leer analíticamente un texto es dividirlo en unidades que proporcionen algún tipo de información y, luego, establecer cómo estas partes se interrelacionan y muestran el panorama de lo que se quiere decir. Al leer un problema de manera analítica, uno puede hacerse estas preguntas: ¿quiénes participan en la historia?, ¿qué es lo que no varía a lo largo de la historia?, ¿cuáles son las condiciones del texto?, ¿cuáles son los datos que nos proporciona?, ¿qué datos son relevantes para resolver el problema?, ¿qué debemos encontrar?, ¿qué condiciones se imponen a lo que buscamos?, entre otras interrogantes que ayudarán a que cada estudiante se familiarice con el problema y le pierda temor a resolverlo.

La lectura analítica ayuda mucho en la comprensión lectora del problema, y aporta al proceso de solución. Leer analíticamente no es identificar las palabras claves ni buscar tips para encontrar la variable (estos son procesos mecánicos que no ayudan a comprender cabalmente un problema).

En la vida real, los problemas matemáticos pueden no contener esas palabras claves que aparecen en problemas diseñados para libros de texto, por lo que el estudiante enfocará erradamente un problema si hace uso de este mecanismo.

La lectura analítica es importante en la comprensión de problemas, pues estos textos contienen elementos matemáticos como números, diagramas, relaciones dentro de una historia o un contexto real complejo, por lo que no es lo mismo que leer un cuento o un ensayo. De hecho, hay personas que comprenden perfectamente textos humanísticos, pero no aquellos que contienen elementos matemáticos.

Parafrasear

Parafrasear es decir algo de otro modo para clarificar y comprender un texto. Explicar un problema con nuestras propias palabras ayuda mucho en el proceso de comprensión. Se debe decir que parafrasear no implica aprenderse de memoria un texto y repetirlo; es señalar lo más importante de una historia y expresarlo con palabras, evitando en lo posible particularidades como números, fechas, nombres, locaciones, etc.

Veamos un ejemplo:

Problema	Parafraseo
Jaime fue el organizador de la fiesta de fin de año de su colegio. Él proyectó ganar S/4800, para lo cual repartió 200 tarjetas; pero, lamentablemente, solo se vendieron 130, lo que le causó una pérdida de S/150. ¿Cuánto invirtió en la fiesta?	Una persona organiza una fiesta. Para ganar necesita vender una cantidad de tarjetas; pero vende menos y pierde. Nos piden saber cuánto invirtió en la fiesta.

Se sugiere que se realice una lectura analítica de los problemas, que el estudiante produzca sus propios esquemas de comprensión y realice al menos dos parafraseos por cada problema presentado.

Hacer esquemas

La capacidad de representar una situación compleja mediante esquemas es algo que se va aprendiendo desde los primeros años de escolaridad y continúa en proceso de construcción toda la vida. Hacer e interpretar esquemas son algunas de las capacidades más necesarias en nuestra vida laboral adulta. En diversas situaciones cotidianas se requiere de la esquematización de los sistemas, las situaciones y los procesos, con el fin de comprenderlos mejor. Un esquema apunta a encontrar una estrategia de solución; no existe una relación directa entre hacer un esquema y dar solución a un problema, pero ayuda mucho en este proceso.

2. Estrategias de resolución

Una estrategia importante en la búsqueda de soluciones es representar el problema mediante algún organizador visual. Aquí presentamos algunos organizadores de información que se utilizan frecuentemente en el proceso de resolver problemas matemáticos.

Diagramas de tiras

Se utilizan mayormente cuando la cantidad que interviene en el problema varía en el tiempo o es dividida en partes que se relacionan entre sí.

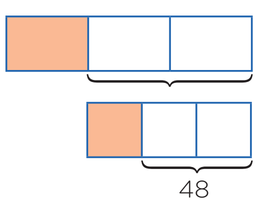
Ejemplo:

La tercera parte de las entradas para el estreno de una película se vendieron días antes de la función, y 1/3 del resto se vendió el día del estreno. Finalmente, quedaron 48 entradas sin vender. ¿Cuál era el número total de entradas previsto para la función de estreno?

Solución:

Cantidad: Número total de entradas.

Elabora un diagrama de tiras.



Diagramas tabulares (tablas)

Se emplean cuando se brinda información sobre características que relacionan dos grupos. También en problemas sobre edades o de proporcionalidad, en los que se debe buscar algún patrón o regla de formación.

Ejemplo:

Dos amigos tienen lápices, borradores y tajadores en sus cartucheras. Hay 8 borradores en total. Mónica tiene el doble de lápices que Felipe, quien tiene 5 tajadores más que lápices. Mónica tiene tantos tajadores como lápices posee Felipe. Mónica tiene 18 útiles y ningún borrador. ¿Cuántos lápices, tajadores y borradores tiene cada uno?

Solución:

Grupo 1: Mónica, Felipe.
Grupo 2: Lápices, borradores, tajadores.

	Lápices	Borradores	Tajadores	TOTAL
Mónica	$2x$	0	x	18
Felipe	x	8	$x + 5$	
TOTAL		8		

Diagramas analógicos

Se suelen utilizar en problemas geométricos. Son dibujos que representan la realidad de manera similar, pero esquemática, sin considerar los elementos irrelevantes para el problema.

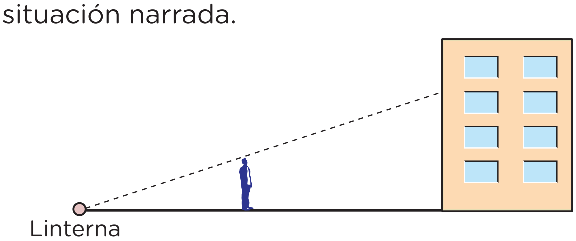
Mediante esta representación es posible visualizar las relaciones entre los datos y las incógnitas.

Ejemplo:

Un hombre de 1,8 m de estatura camina hacia un edificio a razón de 1,5 m/s. Si hay una linterna sobre el suelo a 15 m del edificio, ¿cuánto mide la sombra del hombre sobre el edificio cuando se encuentra a 9 m de este?

Resolución:

Hagamos un diagrama que represente la situación narrada.



Diagramas de flujo

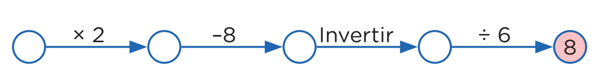
Se emplean cuando una cantidad varía a lo largo de la historia o si tenemos la situación final de esta cantidad. También cuando se dan secuencias de pasos para encontrar objetos matemáticos, entre otras aplicaciones.

Ejemplo:

Un número se duplica, luego se le resta 8 y después se invierten las cifras de este número. Finalmente, se divide por 6 y se obtiene 8. ¿Cuál era el número?

Resolución:

Haremos un diagrama que indique las fases por las que pasó el número.



Diagramas conjuntistas

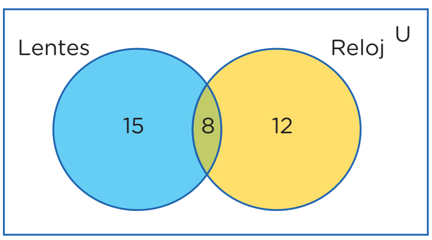
Se suele recurrir a estos cuando se trata de información acerca de dos o más grupos cuyos elementos pueden pertenecer a más de un conjunto. También cuando se deben realizar clasificaciones. Los más conocidos son los diagramas de Venn y los de Carroll.

Ejemplo:

De los 35 estudiantes de un aula, 23 usan lentes y 20, reloj. ¿Cuántos usan ambas cosas?

Resolución:

Grupo 1: Estudiantes que usan lentes.
Grupo 2: Estudiantes que usan reloj.



Diagramas cartesianos

Son de gran utilidad cuando se requiere representar funciones o si tenemos pares ordenados o relaciones entre dos variables.

Ejemplo:

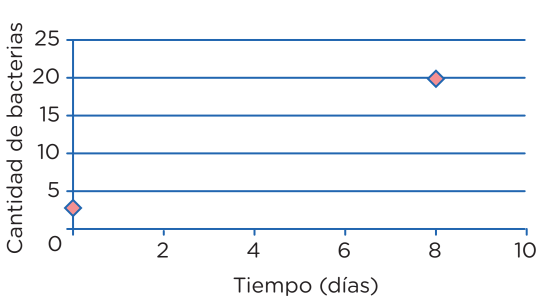
El crecimiento de un grupo de bacterias se da con el paso de los días de manera constante. Al inicio, había 3 bacterias, y después de 8 días llegan a 20. ¿Cuántos días transcurrirán desde el inicio para que la colonia tenga 400 bacterias?

Resolución:

Cantidad:

Organizaremos los datos en un gráfico cartesiano.

Pares ordenados: (0; 3) (8; 20)



Diagramas lineales

Se usan cuando se cuenta con información acerca de una característica de un solo grupo. Generalmente se emplean para ordenar los elementos del grupo con respecto a esa característica.

Ejemplo:

Si tanto Roberto como Alfredo están más alegres que Tomás, mientras que Alberto se encuentra menos alegre que Roberto, pero más alegre que Alfredo, ¿quién está menos alegre?

Resolución:

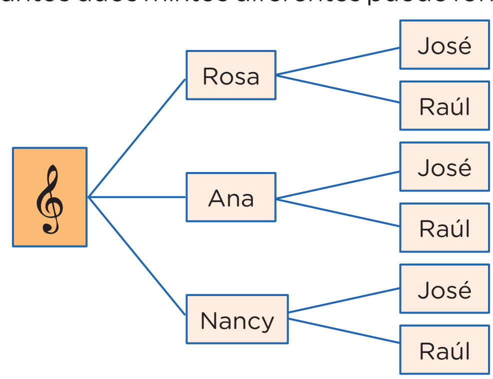
Tomás, Ana, Lidia, Roberto.

Diagrama de árbol

Se suelen utilizar en conteos de casos posibles o para hacer listas sistemáticas. Es la representación gráfica de los principios de adición y multiplicación.

Ejemplo:

Un productor de cumbia quiere armar un dúo mixto (varón y mujer). Puede elegir entre 3 cantantes mujeres y 2 cantantes varones. ¿Cuántos dúos mixtos diferentes puede formar?



3. Otras estrategias

Busca patrones

En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrán emplear para llegar a la solución.

Ejemplo:

El arreglo mostrado se conoce como el triángulo de Pascal.

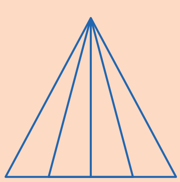
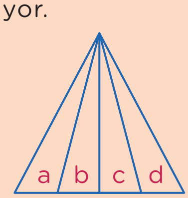
$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Escribe las tres filas siguientes de este arreglo. Como observas, cada fila empieza por uno. ¿Qué número sigue al 1 en la fila 75?, ¿cuál es la suma de los números que ocupan la fila número 20?, ¿puedes encontrar un patrón en las diagonales del triángulo de Pascal?

Haz una lista sistemática

En los casos en que se requiere la enumeración de objetos matemáticos, es conveniente realizar un conteo o listado organizado, con el fin de no dejar de lado ninguna posibilidad. Esta estrategia es muy útil al buscar soluciones en una ecuación polinómica, para encontrar espacios muestrales o resolver problemas de permutaciones o combinaciones.

Ejemplo:

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura? 	Pongamos una etiqueta a cada uno de los cuatro triángulos en que se ha dividido el triángulo mayor. 

Resolución:

- Contemos ahora los triángulos identificándolos por el número de letras:

  Triángulos con una letra: a-b-c-d

  Triángulos con dos letras: ab-bc-cd

  Triángulos con tres letras: abc-bcd

  Triángulos con cuatro letras: abcd
- En total tenemos: 4 + 3 + 2 + 1 = 10 triángulos.

Generaliza

En algunos problemas puede ser muy útil simbolizar las expresiones o averiguar si lo que piden se refiere a un caso particular de alguna propiedad general; a esto se conoce como *la paradoja del inventor*. A veces, es conveniente investigar más de lo que piden.

Ejemplo:

Halla el valor de $(234\,756\,474)^2 - (234\,756\,473)^2$.

Solución:

Se observa que elevar al cuadrado cada número y luego realizar la resta sería demasiado laborioso, así que se trata de ver en la estructura del problema alguna particularidad. Lo primero que se observa es que consiste en una diferencia de cuadrados, lo que nos hace recordar las fórmulas algebraicas pertinentes. Además, se aprecia que los números son consecutivos.

- Al generalizar el problema, se observa que se solicita:

  $(n + 1)^2 - n^2$, cuando n vale 234 756 473
- Factorizando por diferencia de cuadrados, se tiene:

  $(n + 1 + n)\,(n + 1 - n) = (n + 1) + n$
- Luego, podemos afirmar que, para cualquier n entero positivo, se cumple:

  $(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1) + n = 2n + 1$
- Ahora el problema se ha simplificado bastante; para hallar la respuesta, solo basta duplicar el número dado y aumentarle 1.

  Entonces:

  $(234\,756\,474)^2 - (234\,756\,473)^2 = 469\,512\,947$

Particulariza

Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema; de este modo, es posible observar algún método que guíe hacia la solución de un problema genérico.

Ejemplo:

En una tienda de remates te ofrecen un descuento del 12 %, pero, al mismo tiempo, debes pagar el impuesto general a las ventas (18 %). ¿Qué preferirías que calculasen primero, el descuento o el impuesto?

Solución:

- Particularicemos para algunos casos: si el artículo vale S/100 y elijo primero el descuento, termino pagando S/106. Pero si elijo pagar el impuesto antes, entonces termino pagando la misma cantidad.

- Podemos probar con otros precios y obtener un resultado análogo. Esta experimentación me da pie para inferir que es lo mismo elegir primero el descuento o el impuesto.
- Ahora deberé evaluar mi conjetura.

Razona lógicamente

El razonamiento lógico es muy importante al resolver problemas, pues gracias a él podemos engarzar los pasos y comprender las secuencias y cadenas de razonamientos que se producen en el desarrollo de su solución. Un ejemplo clásico es el siguiente acertijo.

Ejemplo:

José, Jaime, Tito y Rosa son guardias en un museo. Ellos hacen guardia cuatro días a la semana. Dos personas solamente hacen guardia cada día. Nadie hace tres días de guardia seguidos. ¿Cuál de los tres hombres no hace guardia con Rosa?

Solución:

Veamos una lista parcial que muestra los días de la semana en los que cada uno hace guardia:

Dom.	Lun.	Mar.	Miér.	Juev.	Vier.	Sáb.
José	Tito	Rosa	José	Jaime	Tito	Rosa
Jaime						

Empieza por el final

La estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se utiliza mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final; también para demostrar desigualdades. La combinación de métodos progresivos y regresivos es una potente técnica para demostrar teoremas.

La utilización del razonamiento regresivo nos evitará tener que trabajar con ecuaciones complicadas.

Ejemplo:

El nivel del agua de un pozo desciende 3 centímetros por debajo de su mitad en cada hora, hasta quedar vacío luego de 4 horas. ¿Qué profundidad tenía el agua inicialmente?

Solución:

- "3 cm debajo de su mitad" se interpreta como $\div 2, -3$.
- Esto ocurre en cada hora y se repite 4 veces, ya que todo el suceso ocurre en 4 horas; de modo que al final el nivel es cero (0).
- Las operaciones directas serían así:

  $x \rightarrow (\div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3) \rightarrow 0$
- Ahora, operando al revés, obtenemos: $x = 90$

Plantea una ecuación

Una de las técnicas de modelación por excelencia a nivel elemental es el planteo de ecuaciones. Lo primordial para poder aplicarla con éxito es el entrenamiento que se tenga en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. Es conveniente ponerse de acuerdo en cuanto a convenciones generales de redacción para no crear ambigüedades.

Ejemplo:

Dos velas de la misma longitud se encienden al mismo tiempo. La primera se consume en 4 horas y la segunda, en 3. ¿Cuánto tiempo pasa, después de haberse encendido, hasta que la primera vela tenga el doble de longitud que la segunda?

Solución:

- La primera vela se consume en su cuarta parte cada hora.
- La segunda se consume en su tercera parte cada hora.

  Tiene que verificarse; por tanto:

  $L - (1/4)Lx = 2\,[L - (1/3)Lx]$; simplificando:

  $1 - (1/4)\,x = 2 - (2/3)x$; de donde $x = 2{,}4$ horas
- Es decir, pasan 2 horas 24 minutos.

Establece submetas

Muchas veces, para llegar a la solución de un problema, se deben resolver problemas más pequeños. Es como escalar una gran montaña: se sabe que se debe llegar a alturas menores para conquistar la cima. De igual manera, para resolver un problema original, se necesita de un problema auxiliar que sirva de medio.

Ejemplo:

Supongamos que la población actual del Perú es de 33 millones de habitantes y la tasa de crecimiento es de un 5 % anual. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población?

Fuente: Shutterstock

Solución:

La primera meta es hallar una fórmula que modele el comportamiento de la población y, solo después de formada, se igualará a 66 millones. Si bien aquí la incógnita es el tiempo, se busca en su lugar la relación entre el tiempo y el número de habitantes.

Utiliza el ensayo y error

Tantear es una estrategia muy útil cuando se hace de forma organizada y evaluando, cada vez, los ensayos que se realizan. En realidad, algunos métodos específicos de solución, como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas, se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.

Ejemplo:

Un libro se abre al azar. El producto de las dos páginas observadas en ese momento es 3192. ¿Cuál es el número de las páginas en las que se abrió el libro?

Fuente: Shutterstock

Solución:

- Primero se observa que 50 × 50 = 2500, número que no llega; y que 60 × 60 = 3600, el cual se pasa. Con esto observamos que los números están en el rango entre 50 y 60.
- 55 × 56 no puede ser, pues el producto termina en 0. Se quiere que termine en 2 y que los números sean consecutivos.
- Al probar 53 × 54 = 2862, el resultado no corresponde.
- Pero, al hacer la prueba con 56 × 57 = 3192, se observa que cumple con el resultado que plantea el problema.
- Entonces, las páginas que se observaron fueron la 56 y la 57.

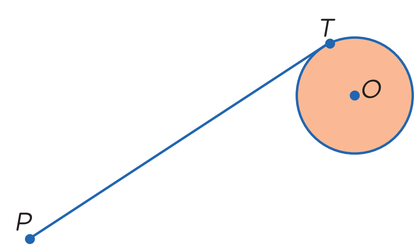
Supón el problema resuelto

Ejemplo:

Usando solo regla y compás, construye una tangente a una circunferencia dada, desde un punto exterior a ella.

Solución:

Para resolver este problema, se supone que se debe hallar la tangente a una circunferencia, trazada desde un punto exterior a ella.



- El punto T es de tangencia. Entonces, ¿qué relación existe entre la tangente y algún elemento de la circunferencia? ¿Hay algún teorema que los relacione?
- Existe un teorema que nos dice que el radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.
- Por tanto, si unimos O con T, tendremos que OT es perpendicular a PT.
- Además, como tenemos tres puntos involucrados, P, T y O, es posible hacer un triángulo uniendo el punto P con el punto O. Se observa que el triángulo es rectángulo.

Ficha 1

¿Cómo cuidamos nuestra salud al comprender y representar información sobre intervalos?

Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Establecemos relaciones entre datos y las transformamos en expresiones numéricas que incluyen operaciones con intervalos. Asimismo, representamos con lenguaje numérico nuestra comprensión sobre intervalos, y seleccionamos estrategias de cálculo, estimación y procedimientos diversos para realizar operaciones con intervalos.

Conozcamos más sobre la presión arterial

Marco, quien cursa el cuarto grado de secundaria, sabe que su abuelo Félix es hipertenso, por lo que siempre toma pastillas para su control. A través de la biblioteca de su institución educativa, Marco indaga más sobre la presión arterial, pues él quiere ayudar a su abuelo a llevar un buen control.

La información que Marco encuentra es la siguiente: "Las arterias son vasos sanguíneos que llevan sangre desde el corazón hacia el resto del cuerpo. La presión arterial (PA) indica la fuerza que ejerce la sangre al circular por las arterias; esta se mide con el tensiómetro y el resultado se usa para diagnosticar **hipertensión** o **hipotensión**".

El resultado de la medición de la presión arterial se expresa mediante dos números que aparecen en la pantalla. A continuación, se muestra un ejemplo.

$$\frac{120}{80}\ \text{mmHg}$$

120 — El número superior indica la fuerza de la sangre en las arterias cuando el corazón se contrae (late). Se la denomina presión sistólica.

80 — El número inferior indica la fuerza de la sangre en las arterias mientras el corazón está relajado (llenándose con sangre entre cada latido). Se la denomina presión diastólica.

Fuente: Shutterstock

Se lee: 120 sobre 80 milímetros de mercurio

La siguiente tabla muestra la clasificación de la presión arterial por niveles o categorías para personas de 18 años a más.

Categoría	Presión sistólica (mmHg)	Presión diastólica (mmHg)
Normal	< 120	< 80
Prehipertensión	120-139	80-89
Hipertensión	≥ 140	≥ 90
Hipertensión fase 1	140-159	90-99
Hipertensión fase 2	≥ 160	≥ 100

Con la información presentada, ayuda a Marco a realizar diversas representaciones sobre los valores mínimos y máximos de la presión sistólica y diastólica, los cuales ayudarán a comunicar una prevención respecto a los niveles de presión arterial.

Comprendemos el problema

1. De acuerdo con el texto leído, ¿qué tipos de presión arterial se conocen?

2. ¿Cuáles son los valores numéricos de la presión arterial para estar en condiciones normales?

3. Según los datos brindados, ¿en qué categorías está en riesgo la vida de una persona?

4. ¿Qué se pide determinar en la situación?

Glosario

La **hipertensión** es un trastorno en el que los vasos sanguíneos tienen una tensión persistentemente alta, la cual incrementa el riesgo de enfermedades cardiovasculares, cerebrales, renales y otras.

La **hipotensión** sucede cuando la presión arterial es mucho más baja de lo normal. Esto significa que es posible que el corazón, el cerebro y otras partes del cuerpo no reciban suficiente sangre.

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

5. ¿Cuál de estas estrategias utilizarías para ayudar a Marco a representar los datos de la situación? Justifica.

   a) Diagrama de doble entrada

   b) Diagrama del plano cartesiano

   c) Diagrama de tiras

Ejecutamos la estrategia o plan

6. En una tabla, escribe como intervalo y como conjunto todas las categorías.

Categoría	Presión sistólica (mmHg)	Presión diastólica (mmHg)
Normal	< 120	< 80
Prehipertensión	120-139	80-89
Hipertensión	≥ 140	≥ 90
Hipertensión fase 1	140-159	90-99
Hipertensión fase 2	≥ 160	≥ 100

Categoría	Intervalo de presión sistólica (mmHg)	Como conjunto	Intervalo de presión diastólica (mmHg)	Como conjunto
Normal	$A_s = [0; 120[$	$A_s = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 120\}$	$A_d = [60; 80[$	$A_d = \{x \in \mathbb{R} / 60 \leq x < 80\}$
Prehipertensión				
Hipertensión				
Hipertensión fase 1				
Hipertensión fase 2				

7. De acuerdo con la información de la tabla, si Félix tuviera una presión arterial de 144 mmHg/93 mmHg, ¿cuál sería su estado de salud según la clasificación de las categorías?

8. ¿El resultado de la categoría es adecuado para su salud? Explica.

9. En un diagrama de la recta numérica, determina gráficamente la unión de los intervalos de las categorías que ponen en riesgo la vida de una persona.

Recuerda

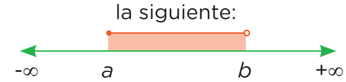
Un intervalo es el conjunto de todos los números reales que están comprendidos entre dos extremos llamados extremo inferior y extremo superior. Por ejemplo:

$[a; b[$

Extremo inferior cerrado: "a" sí pertenece al intervalo

Extremo superior abierto: "b" no pertenece al intervalo

Su representación gráfica es la siguiente:

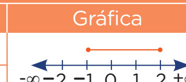


Ten en cuenta

Los intervalos se pueden representar simbólicamente, en la recta numérica y también como conjunto.

Ejemplo

El intervalo $[-1; 2]$

Representación	
Simbólica	Gráfica
$-1 \leq x \leq 2$ $[-1; 2]$	

Notación de conjunto
$\{x / x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 2\}$

Recuerda

Los intervalos acotados se clasifican de la siguiente manera:

Cerrado

Es un intervalo que incluye ambos puntos extremos. Por ejemplo: [1; 4].

Notación conjuntista
$A = \{x / x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 4\}$

Notación gráfica

Abierto

Es un intervalo que no incluye a los puntos extremos. Por ejemplo:]1; 4[.

Notación conjuntista
$B = \{x / x \in \mathbb{R}, 1 < x < 4\}$

Notación gráfica

Semiabierto por la izquierda

Es un intervalo que no incluye al extremo izquierdo, pero sí al derecho.

Por ejemplo:]1; 4].

Notación conjuntista
$C = \{x / x \in \mathbb{R}, 1 < x \leq 4\}$

Notación gráfica

10. En un diagrama cartesiano, representa los datos máximos y mínimos para la presión sistólica; luego, une estos puntos mediante segmentos.

11. En un diagrama cartesiano, representa los datos máximos y mínimos para la presión diastólica; luego, une estos puntos mediante segmentos.

Reflexionamos sobre el desarrollo

12. ¿En qué otras situaciones de la vida puedes usar los intervalos?

13. Describe y explica las estrategias o procedimientos que seleccionaste para resolver la situación.

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

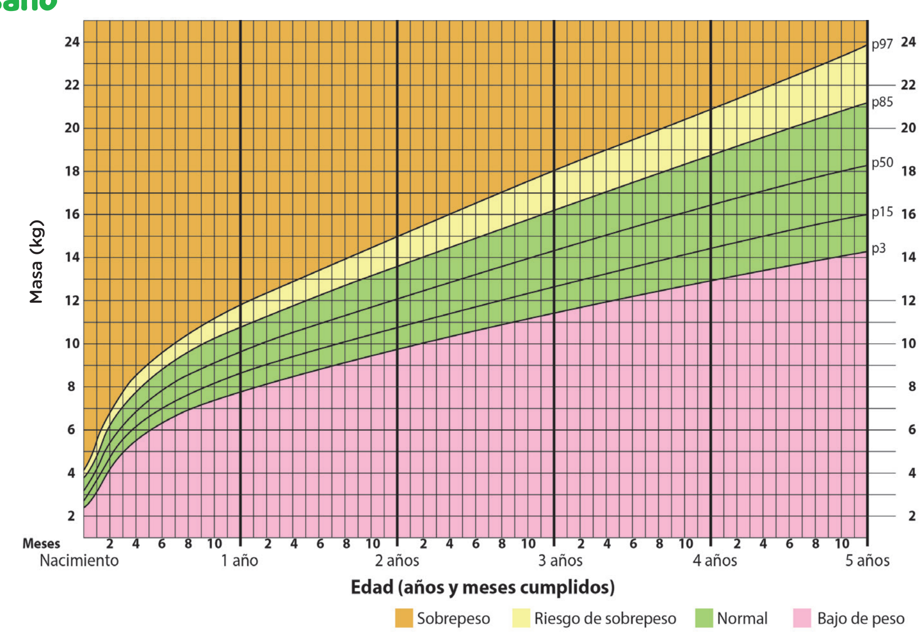
Representamos con lenguaje numérico nuestra comprensión sobre las operaciones con números e intervalos para interpretar el problema según su contexto. Asimismo, justificamos afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con números e intervalos usando propiedades de los números y operaciones.

Situación A: Control de niño sano

El siguiente gráfico representa la relación entre la edad y la masa (kilogramos) de niñas y niños menores de 5 años. ¿De qué otra forma se pueden presentar algunos valores de las categorías existentes?

Masa según la edad (niñas y niños)

Patrones de crecimiento infantil de la OMS - Nacimiento a 5 años (percentiles)



A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Organizamos y completamos la información de la tabla sobre la edad y la masa de la niña o el niño.

Edad	Sobrepeso (kg)	Riesgo de sobrepeso (kg)	Normal (kg)	Bajo de peso (kg)
2 años	De 15 a más	[13,5; 15[	[9,8; 13,5[	[0; 9,8[
3 años	De 18 a más	[16,2; 18[	[11,5; 16,2[	[0; 11,5[
4 años		[18,8; 21[	[13; 18,8[	[0; 13[

Respuesta: Al observar el gráfico mostrado, concluimos que algunos valores de las categorías existentes se pueden presentar en una tabla.

Ahora, respondemos la siguiente pregunta:

1. Si un niño de 3 años tiene una masa corporal de 10 kg, ¿en cuál de las presentaciones la información es más adecuada?

Ten en cuenta

Existen palabras que caracterizan a los extremos de los intervalos. Por ejemplo:

- "Hasta" y "máximo" indican que el extremo superior está incluido.
- "Desde" y "mínimo" indican que el extremo inferior está incluido.
- "Antes", "más baja", "no alcanzó", "por debajo" indican que uno de los extremos no está incluido.

Situación B: Representamos intervalos

A partir de la situación A, escribe intervalos que pertenezcan a cada una de las categorías para un niño de 2 años y 6 meses.

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Mediante la observación y la lectura del gráfico de la situación anterior, determinamos valores (mínimos y máximos) que pertenecen a las categorías, sin ser necesariamente los valores extremos, porque solo se indica que estos “pertenezcan a cada una de las categorías”.

Respuesta:

- Sobrepeso: [16,5; 25]
- Riesgo de sobrepeso: [15; 16,5[
- Normal: ....
- Bajo de peso: [.......... ; ....]

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Qué tipos de intervalos se han escrito?

2. ¿Qué significa el punto 16,5 en el intervalo [15; 16,5[?

3. ¿Qué significan los puntos 16,5 y 25 en el intervalo [16,5; 25]?

4. Escribe cinco valores que se encuentren en el intervalo [15; 16,5[.

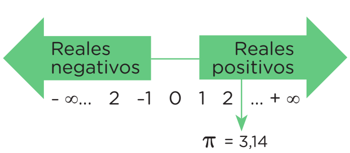
Recuerda

NÚMEROS REALES

Los números reales es la unión de dos conjuntos numéricos, los números racionales (Q) y los números irracionales (I). Los números racionales son los números enteros y las fracciones, mientras que los números irracionales se representan como números infinitos decimales no periódicos, los cuales no pueden convertirse a una determinada fracción.

Ejemplo

$- 5; \frac{2}{7}; - \frac{1}{4}; 0,2; \sqrt{2}; \pi$



En la recta numérica real se ubican todos los números reales, tanto los números racionales como los irracionales. Están ordenados de menor a mayor, de izquierda a derecha.

El símbolo +∞ (más infinito) no es considerado un número real, se usa para indicar que los números reales positivos aumentan ilimitadamente, lo mismo ocurre con el símbolo -∞ (menos infinito).

Aprendemos a partir del error

Situación C: Tiempo de producción

De acuerdo a su experiencia, el supervisor de una panadería estimó los tiempos de producción (en horas) del millar de bocaditos dulces y del millar de bocaditos salados, y los expresó mediante intervalos:

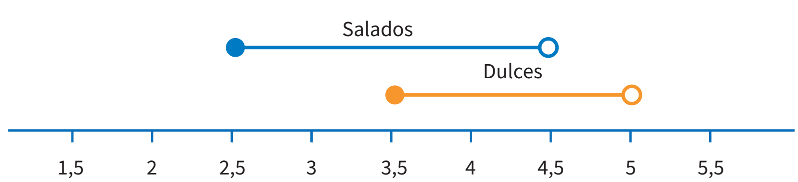
Tiempo de producción del millar de bocaditos dulces: [3,5; 5[
Tiempo de producción del millar de bocaditos salados: [2,5; 4,5[

¿Cómo expresarías mediante un solo intervalo el tiempo que podría tardar la producción de un millar de bocaditos surtidos?

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

Observamos que el tiempo mínimo de producción es de 3,5 horas si todos los bocaditos fueran dulces; asimismo, que el tiempo máximo es de 4,5 horas si todos fueran salados. Entonces, los bocaditos surtidos serán producidos en ese rango de tiempo. Esto equivale a la intersección de ambos intervalos.
Para visualizar esta operación, representamos los intervalos en la recta numérica:



Por lo tanto: [3,5; 5[∩ [2,5; 4,5[= [3,5; 4,5[.

Respuesta: La producción de un millar de bocaditos mixtos tardaría de 3,5 a 4,5 horas.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. ¿Qué tipos de intervalos son los que representan los tiempos de producción de los bocaditos dulces y salados?

2. ¿Es correcto decir que el tiempo de producción de bocaditos surtidos es de 3,5 a 4,5 horas? Explica.

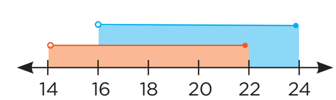
Ten en cuenta

Observa este ejemplo sobre operaciones con intervalos:

Por la mañana, la temperatura máxima fue de 24 °C y la mínima no alcanzó los 16 °C. Por la tarde, el registro alcanzó 22 °C y nunca llegó a 14 °C.

a. ¿En qué intervalo están comprendidas las temperaturas?

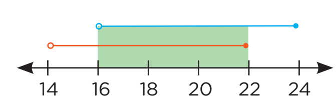
Hallamos la unión:



]14; 22] ∪]16; 24] =]14; 24]
Las temperaturas están comprendidas entre 14 °C y 24 °C inclusive.

b. ¿Qué intervalo de temperaturas comparten la mañana y la tarde?

Hallamos la intersección:



]14; 22] ∩]16; 24] =]16; 22]
Las temperaturas mayores de 16 °C y menores o iguales que 22 °C son comunes.

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito

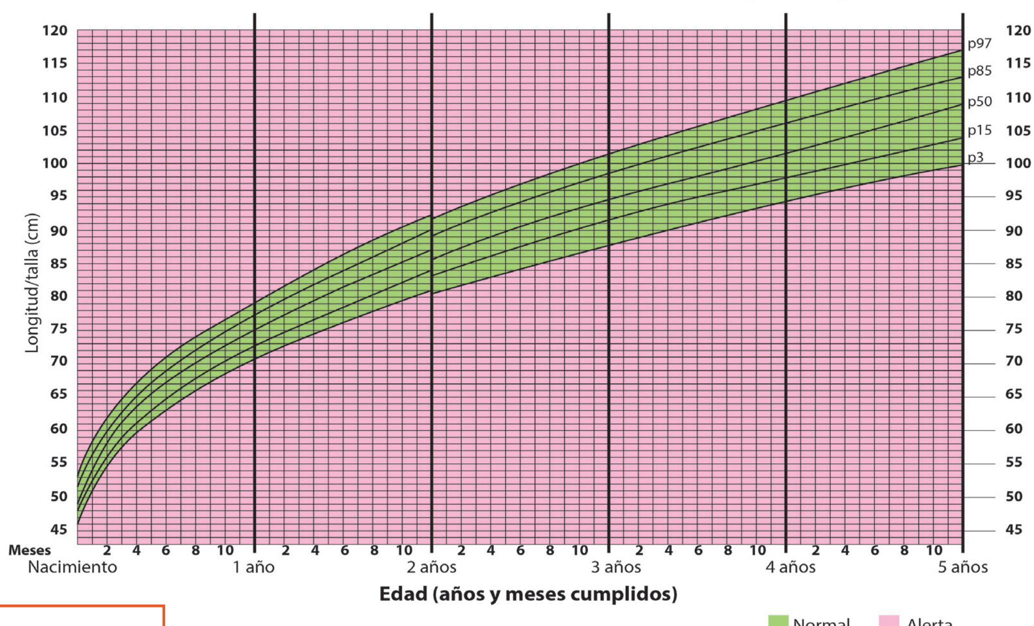
Establecemos relaciones entre datos que incluyen operaciones con intervalos. Asimismo, expresamos con lenguaje numérico nuestra comprensión sobre intervalos, y seleccionamos estrategias de cálculo, estimación y procedimientos diversos para realizar operaciones con intervalos. Justificamos afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con intervalos.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

Edad y talla de niñas y niños menores de 5 años

La siguiente gráfica muestra la relación entre la edad y la estatura de niñas y niños de 0 a 5 años de edad.

Con esta información, responde las preguntas 1 y 2.



Ten en cuenta

Para leer adecuadamente la gráfica Edad vs. talla, primero ubica el punto que corresponde a la edad del niño; luego, desde ese punto, traza una línea vertical. Enseguida, identifica el punto correspondiente a su talla y traza una línea horizontal que pase por él.
La intersección de ambas líneas representa el punto de ubicación, el cual debe ser interpretado de acuerdo a los rangos "normal" o "alerta".

1. ¿Entre qué valores debería estar la talla de un niño de 4 años y 8 meses de edad para que la relación talla-edad sea adecuada y se ubique en la categoría "normal"?

   a) [94; 111]
   b) [98; 114,5]
   c) [100; 120]
   d) [45; 120]

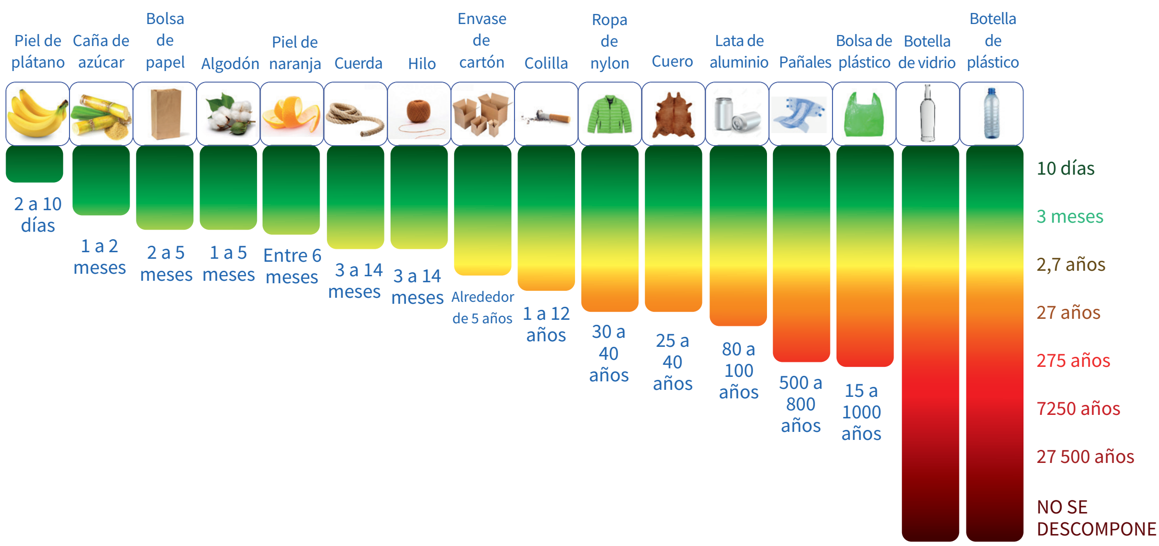
2. ¿Qué intervalo de estaturas le corresponde a un niño de 3 años que se encuentra en la categoría "alerta"? Sustenta tu respuesta.

   a) [88; 100[
   b) [88; 100]
   c) [0; 88[
   d) [0; 88] ∪ [101; 120]

¿Cuánto tardan en degradarse los objetos?

Los desechos sólidos se denominan comúnmente “basura” y representan una amenaza debido a su producción excesiva e incontrolada, ya que contaminan las aguas, la tierra y el aire. Además, ponen en peligro la salud humana y la naturaleza en general. Algunos de estos desechos pueden tardar mucho tiempo en descomponerse o degradarse, como se muestra en el gráfico.

Adaptado de PROGAI-Universidad de Costa Rica



Con esta información, responde las preguntas 3 y 4.

3. ¿Cuál es el tiempo, representado mediante un intervalo, que tarda en degradarse una bolsa de plástico?

   a) [10; 900]
   b) [80; 100]
   c) [15; 1000]
   d) [5; 500]

4. Representa, utilizando intervalos, el tiempo que tarda en degradarse una cuerda y el que tarda una bolsa de papel.

5. Lorena resuelve la siguiente actividad sobre operaciones con intervalos:

   Si $A = [0; 5[$ y $B = [2; 7]$, determina $A \cap B$.

   Ella obtiene como respuesta [2; 5]. Sin embargo, Dante le dice que esa respuesta es incorrecta. ¿Con cuál de los dos estás de acuerdo? Justifica tu respuesta.

   a) Con Lorena
   b) Con Dante
   c) Con ninguno
   d) Con los dos

¿Sabías que...?

En la notación simbólica de los intervalos abiertos, también se emplean los símbolos < >.

Ejemplo

<5; 19> =]5; 19[

6. Escribe en forma de intervalo y representa gráficamente el enunciado de cada caso.

- Todos los números reales comprendidos entre −2 y 5, ambos incluidos.
- Todos los números reales menores que 3.
- Todos los números reales comprendidos entre −1 y 2, incluyendo el −1 y no el 2.
- Todos los números mayores o iguales que −4.

7. Si se sabe que $|a| < b$ es equivalente a "$-b < a < b$", ¿cuál es el intervalo que contiene los valores reales de x tales que $|2x + 3| < 15$?

a)]−18; 12[

b)]−15; 15[

c)]−3; 3,6[

d)]−9; 6[

Índice de masa corporal (IMC)

Conocer el índice de masa corporal (IMC) es una buena forma de determinar si la masa corporal de una persona es saludable respecto de su estatura. Para calcularlo, se divide la masa corporal de la persona (en kilogramos) entre el cuadrado de su estatura (en metros).
La tabla de la derecha muestra las categorías a las que puede pertenecer una persona según su IMC.

IMC	Categoría
Menos de 18,6	Delgado
Desde 18,6 hasta 24,9	Normal
Más de 24,9 y menos de 30	Sobrepeso
Desde 30 hasta menos de 35	Obesidad grado 1
Desde 35 hasta menos de 40	Obesidad grado 2

8. Abel tiene una masa corporal de 68,5 kg y una estatura de 1,45 m. Tomando en cuenta el valor de su IMC, ¿en qué categoría se ubica según la tabla? Explica tu respuesta.

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos y las transformé en expresiones numéricas que incluyen operaciones con intervalos.			
Representé con lenguaje numérico mi comprensión sobre intervalos.			
Seleccioné estrategias de cálculo, estimación y procedimientos diversos para realizar operaciones con intervalos.			
Justifiqué afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con números e intervalos.			

¿Cómo representamos y comprendemos los valores máximos o mínimos en diversas situaciones?

Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Establecemos relaciones entre magnitudes y las transformamos en expresiones algebraicas o gráficas que incluyen funciones cuadráticas ($f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ y $a \in \mathbb{Q}$). Asimismo, empleamos estrategias heurísticas y propiedades para hallar el vértice de la gráfica de una función cuadrática y para encontrar el máximo o mínimo valor.

Entradas al teatro

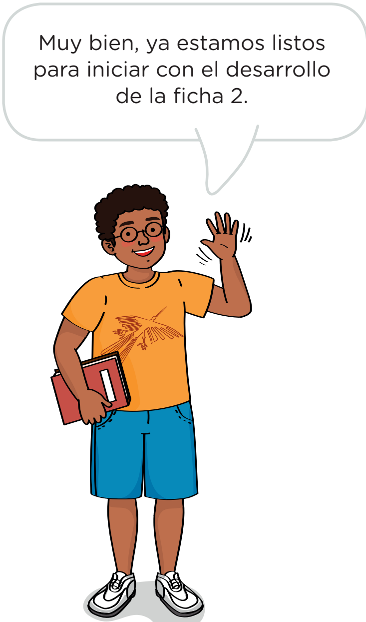
Como parte de un proyecto artístico, los estudiantes de una institución educativa realizarán una función de teatro. El auditorio tiene capacidad para 500 asistentes y se fija el precio de la entrada en S/10. Sin embargo, debido a gastos adicionales, los responsables de la organización se ven en la necesidad de incrementar el precio para obtener mayores ingresos, y consideran que, por cada S/1 de incremento, desistirán 10 personas de asistir a dicha función.

Fuente: Erik Mclean

a. ¿Cuánto es el máximo incremento que se puede hacer de modo tal que se obtenga el mayor ingreso posible?

b. ¿Cuál será el precio de la entrada según la condición expresada?

c. ¿A cuánto equivale el máximo ingreso?



Comprendemos el problema

1. ¿Con qué motivo se realizó la función de teatro?

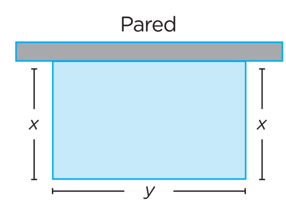
2. ¿Cuál es la capacidad del auditorio?

3. ¿Cómo se relaciona el incremento en el precio de la entrada con la cantidad de personas que desisten?

4. ¿Qué se te pide hallar la situación?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

5. Analiza la situación: Lucía tiene 16 m de malla para cercar un corral de forma rectangular para sus pavos. Si uno de los lados coincide con una pared, ¿cuáles son las variables? ¿Qué representa la relación entre las variables?



Resolución:

Del dato y del gráfico se tiene:

$$x + y + x = 16 \text{ m}$$
$$y + 2x = 16$$
$$y = 16 - 2x$$

* Se sabe que:

Área del corral (A(x)) = largo x ancho

ancho = x **largo** = 16 - $2x$

* A(x) = x (16 - $2x$)

- De la tabla se reconoce que la expresión algebraica para calcular el área es $A(x) = (16 - 2x)(x) = -2x^2 + 16x$.
- También se reconoce que:
  - variable independiente: ancho del terreno (x)
  - variable dependiente: área del terreno ($A(x)$)
- La relación de estas dos variables está representada por la siguiente función cuadrática:

$$A(x) = -2x^2 + 16x$$

Recuerda

En el siguiente ejemplo de función cuadrática tenemos:

$f(x) = -6x^2 + 4x - 8$

$-6x^2$: término cuadrático
$4x$: término lineal
-8: término independiente

En la representación de una función cuadrática, $y = f(x)$, se emplean dos variables:
x: variable independiente
y: variable dependiente

6. ¿Qué estrategia emplearías para relacionar la variación del incremento en el precio de la entrada con el ingreso que se genera?

a) Un diagrama de árbol
b) Un diagrama de tiras
c) Un diagrama tabular
d) Planteo de ecuaciones

7. A partir de lo realizado en la situación inicial, ¿cuáles son las variables que identificas? ¿Qué estrategia o procedimiento desarrollarías para resolver la situación?

Variable A	
Variable B	
Estrategia	

Ejecutamos la estrategia o plan

8. Suponiendo que se venden todas las entradas, ¿cómo se puede obtener el ingreso total? Expresa el monto.

9. Si se expresa que “por cada 1 sol de aumento desisten 10 personas”, completa la tabla.

Incremento	Número de asistentes
1	
	500 – 10(1)
x	

10. Completa la tabla. Considera lo siguiente:
- x: incremento en el precio de la entrada (S/)
- $I(x)$: función ingreso (S/)
- $I(x)$: función ingreso (S/)

Incremento (x)	Precio de entrada	Número de Asistentes	Ingreso $I(x)$
0	10	500	(10)(500) = 5000
1	10 + 1	500 – 10(1)	(10 + 1)(500 – 10(1)) = 5390
2	10 + 2	500 – 10(2)	(10 + 2)(500 – 10(2)) = 5760
10			
20			
30			
40			
...			
x	10 + x		

Recuerda

Una expresión algebraica se representa mediante la combinación de números, letras y operaciones matemáticas de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación con exponente natural y radicación. Por ejemplo:

$P(x) = 3x + 9$

$S(x, y) = x - 5y$

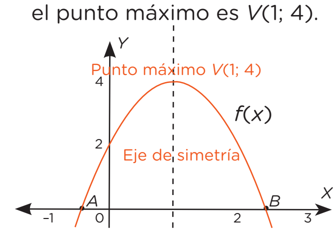
$R(x) = -5x^3$

Ten en cuenta

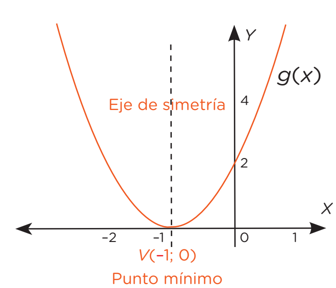
La gráfica de una función cuadrática es una parábola continua, es decir, no presenta cortes ni saltos. Su vértice, $V(h; k)$, es un punto que se encuentra en el eje de simetría.

Ejemplos

a. En $f(x) = -2x^2 + 4x + 2$, el punto máximo es $V(1; 4)$.



b. En $g(x) = 2x^2 + 4x + 2$, el punto mínimo es $V(-1; 0)$.



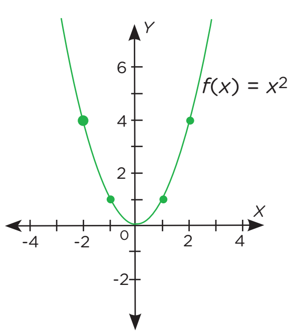
Recuerda

La representación gráfica de una función cuadrática se realiza empleando las coordenadas (x; $f(x)$).

Por ejemplo, dada la función $f(x) = x^2$, su representación tabular se halla asignando valores a x y reemplazando en $f(x)$.

x	$f(x)$
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4

La gráfica de la función $f(x) = x^2$ es la siguiente:



11. Analiza los datos de la tabla y, a partir de ella, expresa cuál será el máximo incremento que se debe realizar para obtener el mayor ingreso posible y responde a la pregunta **a.** de la situación.

12. ¿Cuál será el precio de la entrada según la condición expresada y responde a la pregunta **b.** de la situación?

13. ¿A cuánto equivale el máximo ingreso y responde a la pregunta **c.** de la situación?

Reflexionamos sobre el desarrollo

14. Describe la estrategia empleada para resolver la situación planteada.

15. ¿Qué otro procedimiento aplicarías para verificar el valor del vértice? Explica.

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

Expresamos con diversas representaciones gráficas, tabulares, simbólicas y con lenguaje algebraico la relación entre la variación de los coeficientes de una función cuadrática. Asimismo, justificamos afirmaciones sobre relaciones de cambio que observamos entre las variables de una función cuadrática, y corregimos errores si los hubiera.

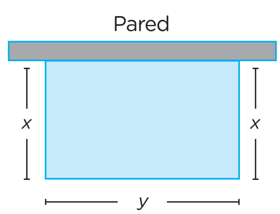
Situación A: Cercamos un terreno

Un horticultor cuenta con 400 m de malla para delimitar un terreno rectangular. Si quiere aprovechar un muro ya existente para cercar uno de los lados, ¿cuál es la expresión que representa el área del terreno rectangular?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Representamos el terreno con sus medidas. Para ello, denotamos con x la medida (en metros) del ancho del terreno que se debe cercar.



- En un diagrama tabular, relacionamos y completamos los valores del ancho, largo y área del terreno.

  Variable independiente: ancho del terreno (x)

  Variable dependiente: área del terreno $A(x) = xy$

  * Del dato:

  $x + x + y = 400$

  $y = 400 - 2x$

- Observamos que el área del terreno está dada por:

$$A(x) = 400x - 2x^2$$
$$A(x) = -2x^2 + 400x$$

Ahora, respondemos las siguientes preguntas en tu cuaderno:

1. ¿Para qué valor de x se tiene la mayor área del terreno?

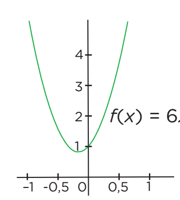
2. Representa la expresión matemática del área del terreno en un plano cartesiano.

Recuerda

Orientación o concavidad de la parábola

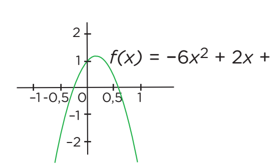
- $f(x) = 6x^2 + 2x + 1$

Si el coeficiente principal es positivo, la parábola se abre hacia arriba.



- $f(x) = -6x^2 + 2x + 1$

Si el coeficiente principal es negativo, la parábola se abre hacia abajo.



Situación B: Programador de videojuego

Para la programación de un nuevo videojuego, Luis ha usado la función $y = -x^2 + 12x - 20$ para describir la trayectoria de un misil, que está al ras del agua y que es lanzado desde un submarino hacia un barco que se encuentra a 13 m de distancia. Un compañero le comenta a Luis que en el juego el misil no alcanza al barco. ¿La función expresada es la correcta? Si no es así, ¿cuál es la distancia que recorre el misil?

Recuerda

El aspa simple es uno de los métodos que existen para resolver ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo

Resuelve esta ecuación:

$4x^2 - x - 3 = 0$

Aplicamos el método del aspa simple:

$4x^2 - x - 3 = 0$

$4x \quad +3$

$x \quad -1$

La ecuación factorizada es la siguiente:

$(4x + 3)(x - 1) = 0$

Igualamos a cero cada factor:

$4x + 3 = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{4}$

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

Por tanto, C. S. = $\{-\frac{3}{4}; 1\}$.

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

- En el momento en que el misil cae al agua, $y = 0$.
- Para determinar la distancia que recorre el misil desde el punto de lanzamiento hasta tocar el agua, se halla el valor de x cuando $y = 0$.

  Entonces, reemplazamos el valor de $y = 0$ en la función $f(x)$:

  $y = -x^2 + 12x - 20 \rightarrow \boxed{\quad} = -x^2 + 12x - 20$
- Multiplicado por -1, se obtiene:

  $0 = -1(\boxed{\qquad\qquad}) \rightarrow x^2 - 12x + 20 = 0$
- Factorizando la expresión $x^2 - 12x + 20$, resulta $(x - 2)(\boxed{\quad}) = 0$
- Igualamos a cero cada factor: $x - 2 = 0$ o $x - \boxed{\quad} = 0$
- Resolvemos cada ecuación: $x = 2$ o $x = 10$
- Los valores encontrados de x nos indican las coordenadas del punto de lanzamiento del misil (2; 0) y del punto que representa el momento en que este ingresa al agua (10; 0). La diferencia de los valores de x es 8 m.

Respuestas:

- El misil no alcanza al barco, porque la distancia entre el punto de lanzamiento y el punto en que el misil ingresa al agua es 8 m, y el barco se encuentra a 13 m del punto de lanzamiento.
- El misil recorre una distancia de 8 m (en la horizontal).

Ahora, respondemos la siguiente pregunta:

1. Representa en el plano cartesiano la función $y = -x^2 + 12x - 20$. Luego, interpreta el punto máximo.

Aprendemos a partir del error

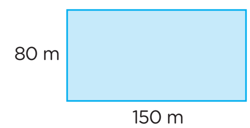
Situación C: Área de un terreno

La Municipalidad de Pisco dispone de un terreno rectangular de 150 m por 80 m destinado para el tratamiento de residuos sólidos. En este sentido, debe recortar en x m el lado más largo e incrementar en x m el lado más corto. Representa la expresión algebraica del área del nuevo terreno y determina la máxima área.

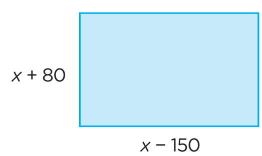
Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

- Representamos el terreno rectangular original:



- Según las condiciones, el nuevo terreno tendrá las siguientes medidas:



- Luego, el área del nuevo terreno está dada por:

$$A(x) = (x - 150)(x + 80)$$
$$A(x) = x^2 + 80x - 150x - 12\ 000$$
$$A(x) = x^2 - 70x - 12\ 000$$

- Hallamos el valor de las coordenadas del vértice $V(h;\ k)$ para conocer la máxima área.

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-70)}{2(1)} = 35$$

$$k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(-70)^2 + 4(1)(-12\ 000)}{4(1)} = -13\ 225 \rightarrow V(35;\ -13\ 225)$$

Respuesta: La máxima área es −13 225 m^2.

Ten en cuenta

El vértice $V(h;\ k)$ de la parábola dada por $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ se determina mediante estas expresiones:

$$h = \frac{-b}{2a} \text{ y } k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Ejemplo

Sea la función $y = -2x^2 + 4x + 6$.

Hallamos el vértice $V(h;\ k)$:

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-2)} = 1$$

$$k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(4)^2 + 4(-2)(6)}{4(-2)}$$

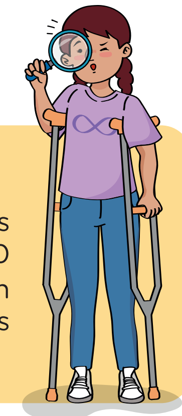
$$k = 8$$

Por lo tanto: $V(h;\ k) = V(1;\ 8)$

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. En el caso de que hubiera un error, ¿cuál sería su corrección?

2. Representa la expresión algebraica del área del nuevo terreno en un plano cartesiano. Interpreta el punto máximo.



Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito

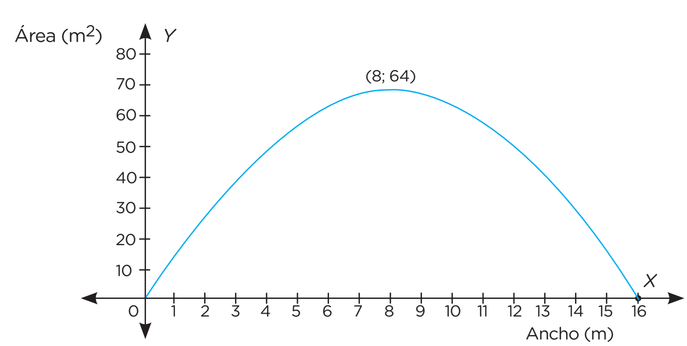
Establecemos relaciones entre magnitudes y las transformamos en expresiones algebraicas o gráficas que incluyen funciones cuadráticas ($f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ y $a \in \mathbb{Z}$). Expresamos con diversas representaciones la relación entre la variación de los coeficientes de una función cuadrática. Asimismo, justificamos afirmaciones sobre una función cuadrática, y corregimos errores si los hubiera.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Julio y su familia han emprendido un negocio en el rubro de turismo y, para promocionarlo, ofrecen la siguiente oferta: por 30 personas, el costo de cada boleto para el *tour* es S/100; pero, si el número de personas aumenta, el costo del boleto disminuirá en S/1 por cada persona adicional. Determina la expresión algebraica que representa la recaudación total en función de la cantidad de personas adicionales (x).

   a) $f(x) = -x^2 + 30x + 3000$
   b) $f(x) = 3000 + 70x - x^2$
   c) $f(x) = x^2 - 40x + 3100$
   d) $f(x) = -x^2 + 100x + 10\,000$

2. La municipalidad de un distrito propone a los pobladores el sembrado de árboles como parte de un proyecto de reforestación en su comunidad. La primera tarea fue delimitar el terreno rectangular donde se prepararán los almácigos; para ello, los responsables les entregan a los pobladores 32 metros de malla para cercar el terreno, y solicitan que se delimite la máxima área. La gráfica mostrada representa la relación entre el área y el ancho del terreno.



   Considerando la información de la gráfica, ¿cuál es la máxima área que pueden conseguir los pobladores con el total de malla? ¿Cuánto medirá el ancho del terreno?

   a) Área = 8 m^2; ancho = 64 m
   b) Área = 64 m^2; ancho = 8 m
   c) Área = 16 m^2; ancho = 8 m
   d) Área = 32 m^2; ancho = 16 m

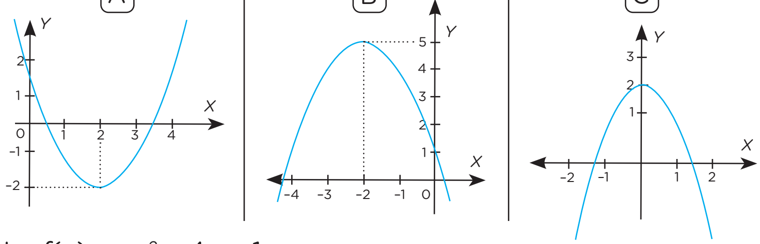
3. La **utilidad** (U) de una empresa, en miles de dólares, está dada por la expresión $U(x) = -x^2 + 12x - 24$, donde x representa el número de cientos de unidades vendidas. Calcula el número de unidades que se deben vender para obtener la máxima utilidad posible.

a) 300 c) 500

b) 400 d) 600

4. Analiza la gráfica de cada función y relaciónala con su respectiva expresión algebraica.

A B C



I. $f(x) = -x^2 - 4x + 1$
II. $g(x) = x^2 - 4x + 2$
III. $h(x) = -2x^2 + 2$

Luego, marca la alternativa correcta.

a) A–II, B–III, C–II c) A–III, B–I, C–II

b) A–II, B–I, C–III d) A–I, B–II, C–III

5. Un edificio tiene 60 minidepartamentos que pueden ser alquilados en su totalidad a S/500 cada uno. Por cada S/10 de aumento en el alquiler, 2 minidepartamentos quedarán sin ser alquilados. Modela el ingreso de los alquileres en este edificio mediante una expresión algebraica.

a) $I(x) = 20x^2 + 400x + 30\,000$

b) $I(x) = -20x^2 - 400x + 30\,000$

c) $I(x) = 20x^2 - 400x + 30\,000$

d) $I(x) = 20x^2 + 400x - 30\,000$

6. De las cuatro esquinas de una pieza rectangular de latón, se cortan cuadrados de 1 cm de lado. De esta manera, al doblar los extremos salientes, se obtiene una caja abierta sin tapa, de modo que las medidas de su base difieren en 3 cm. Si la caja resultante presenta 28 cm³ de volumen, ¿qué medidas tiene la pieza original de latón?

a) 3 cm × 9 cm c) 6 cm × 9 cm

b) 6 cm × 18 cm d) 3 cm × 18 cm

Glosario

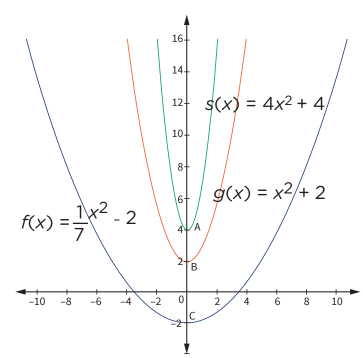
La **utilidad** es un porcentaje de la renta neta (ganancias después de descontar inversiones e impuestos) obtenida por las empresas como resultado de su gestión.

Recuerda

En una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $b = 0$, el coeficiente c desplaza a la gráfica hacia arriba o hacia abajo.

Ejemplo

Analiza el comportamiento de las gráficas mostradas.



¿Qué conclusión se obtiene del comportamiento de c?

- Si $c > 0$, el desplazamiento es hacia arriba.
- Si $c < 0$, el desplazamiento es hacia abajo.

¿Sabías que...?

En diversas situaciones cotidianas es común utilizar las expresiones "máximo" y "mínimo". Por ejemplo, en el ámbito económico, se requiere conocer el máximo ingreso, utilidad, renta o ganancia. También podríamos necesitar calcular el máximo volumen, superficie, capacidad, etc.

7. Un campo petrolero tiene 30 pozos, cada uno de los cuales produce 18 000 barriles diarios de petróleo. Se sabe que, por cada nuevo pozo perforado en el campo, la producción diaria de cada uno de los pozos disminuye en 5 barriles. Determina el número de nuevos pozos que maximiza la producción total P del campo petrolífero.

   a) 2400 b) 600 c) 1785 d) 1550

8. Una empresa dedicada a empacar y transportar huevos ha proyectado sus ingresos (I), según los miles de huevos empacados (h), con la siguiente función:

   $I(h) = -100h^2 + 1000h + 7500$, con $h \geq 0$

   ¿Para qué valores de h se alcanzan el ingreso máximo y el ingreso nulo respectivamente?

   a) $h = 0{,}5$ y $h = 10$
   b) $h = 10$ y $h = 0{,}5$
   c) $h = 5$ y $h = 15$
   d) $h = 12$ y $h = 15$

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre magnitudes y las transformé en expresiones algebraicas o gráficas que incluyen funciones cuadráticas ($f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ y $a \in \mathbb{Q}$).			
Expresé con diversas representaciones gráficas, tabulares, simbólicas y con lenguaje algebraico la relación entre la variación de los coeficientes de una función cuadrática.			
Combiné y empleé estrategias heurísticas y propiedades para simplificar expresiones algebraicas y graficar funciones cuadráticas.			
Justifiqué afirmaciones sobre relaciones de cambio que observé entre las variables de una función cuadrática.			

Ficha 3

¿Cómo empleamos la escala numérica para optimizar espacio en diversos contextos?

Construimos nuestros aprendizajes

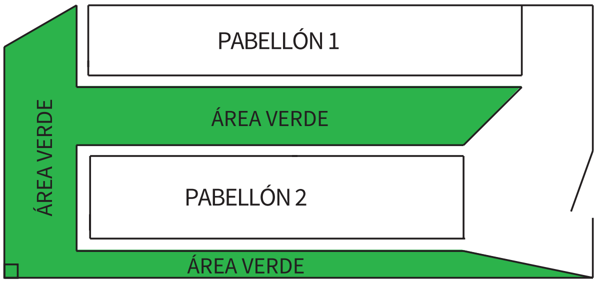
Propósito

Establecemos relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales y las representamos con formas bidimensionales compuestas. Asimismo, empleamos estrategias heurísticas para calcular la longitud y el área de formas geométricas compuestas.

Las áreas verdes mejoran nuestra vida

Un equipo de estudiantes, con apoyo de su docente y en coordinación con el director, rediseña el plano de su institución educativa, con la finalidad de implementar áreas verdes junto a los pabellones, como se muestra en el plano. Luego de que los albañiles rompen y retiran el piso de cemento, el terreno queda listo para cubrirlo de césped. Con este fin, se proyecta comprar césped natural, a S/7,50 el metro cuadrado.

Fuente: Shutterstock



Escala 1:1000

Luego de haber leído la situación, asume el papel de un estudiante del equipo y responde las siguientes interrogantes:

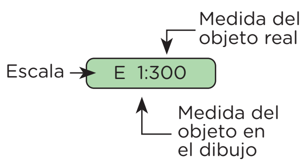
a. ¿Cuánto césped natural se necesita comprar para cubrir toda el área verde?

b. Si se cuenta con S/6200 para la compra de césped, ¿se logrará implementar todo el sector de áreas verdes? Explica tu respuesta.

Recuerda

Cómo se interpreta una escala

Una escala numérica tiene la siguiente forma:



Se lee "escala de 1 a 300" y se interpreta así: 1 cm en la representación del plano o mapa corresponde a 300 cm en el objeto real.

Ten en cuenta

Estas son algunas equivalencias entre las unidades de longitud:

- 1 m ≡ 100 cm
- 1 km ≡ 1000 m
- 1 km ≡ 100 000 cm

Comprendemos el problema

1. ¿Qué figuras geométricas representan los pabellones 1 y 2?

2. ¿Qué figuras geométricas componen el área verde?

3. ¿Cuánto cuesta el metro cuadrado de césped natural?

4. ¿Cómo se interpreta la expresión 1:1000?

5. ¿Qué se pide calcular en las preguntas de la situación?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

6. ¿Qué estrategia aplicarías para descomponer el plano en formas geométricas conocidas?

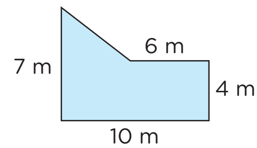
7. ¿Qué procedimiento emplearías para conocer las dimensiones reales del plano?

a) Determinar la medida de la superficie de las áreas verdes y luego multiplicar el resultado por 7,50 para saber el costo total.

b) Medir los lados de las figuras usando una regla, y con esos datos determinar las medidas reales utilizando la escala.

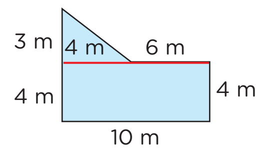
c) Determinar las medidas reales de las figuras utilizando la escala; luego, calcular el área de todo el plano y hallar el costo del césped.

8. Analiza esta situación: Gildo va a remodelar el piso de su local comercial, que está deteriorado. Las medidas de la superficie del piso están en la figura. ¿Cuántos metros cuadrados de losetas debe comprar?



Resolución

- Descomponemos la figura en otras figuras conocidas; para ello, trazamos una línea horizontal.



- Encontramos un triángulo de 3 m de altura y 4 m de base, y un rectángulo de 10 m por 4 m.
- Para saber la cantidad de losetas que se debe comprar, vamos a determinar el área de la superficie:

$A_{\text{rectángulo}} = 10 \times 4 = 40 \text{ m}^2$

$A_{\text{triángulo}} = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6 \text{ m}^2$

$A_{\text{total}} = 40 + 6 = 46 \text{ m}^2$

- Respondemos la pregunta:

Gildo debe comprar 46 m^2 de losetas.

9. Tomando en cuenta tus respuestas anteriores, describe el procedimiento que realizarías para resolver la situación dada.

Ejecutamos la estrategia o plan

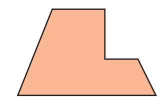
10. Descompón el sector de áreas verdes en trapecios. Luego, representa gráficamente cada figura con las medidas en el plano.

Ten en cuenta

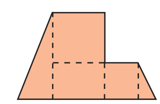
Las figuras planas compuestas se pueden descomponer en dos o más figuras planas simples.

Ejemplo

La figura representa el terreno de un condominio.



Una forma de descomponer es la siguiente:



Esta descomposición está conformada por rectángulos y triángulos.

Recuerda

La escala es la razón entre la longitud del dibujo (d) y la longitud real (D):

$E = \dfrac{d}{D}$

Ejemplo

Dos ciudades están separadas por una distancia de 6 cm en el papel. Si el mapa está a una escala de 1:4 000 000, ¿a qué distancia están separadas realmente las ciudades?

Empleamos la expresión dada:

$E = \dfrac{d}{D} \rightarrow \dfrac{1}{4\,000\,000} = \dfrac{6 \text{ cm}}{D}$

$D = \dfrac{4\,000\,000 \times 6}{1} = 24\,000\,000 \text{ cm}$

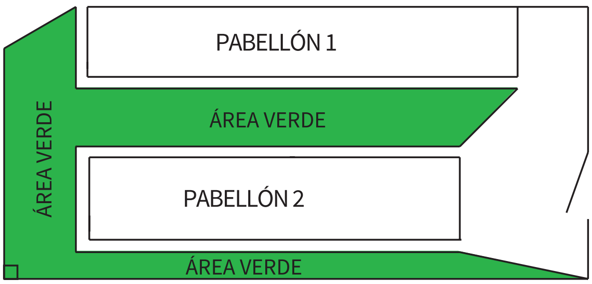
Convertimos centímetros a kilómetros:

$\dfrac{1 \text{ km}}{100\,000 \text{ cm}} = \dfrac{x \text{ km}}{24\,000\,000 \text{ cm}}$

$x = \dfrac{24\,000\,000}{100\,000} = 240 \text{ km}$

Respuesta: Las ciudades están separadas por una distancia de 240 km.

11. Determina las medidas reales de las figuras con forma de trapecio de la situación inicial empleando la escala. Luego, completa las tablas.



Escala 1:1000

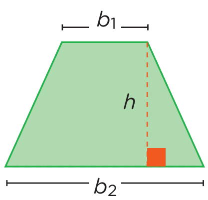
Trapecio 1	Dibujo (cm)	Realidad (m)
Área del rectángulo		
Área del triángulo		
Área total		

Trapecio 2	Dibujo (cm)	Realidad (m)
Área del rectángulo		
Área del triángulo		
Área total		

Trapecio 3	Dibujo (cm)	Realidad (m)
Área del rectángulo		
Área del triángulo		
Área total		

Recuerda

La expresión para hallar el área del trapecio es la siguiente:

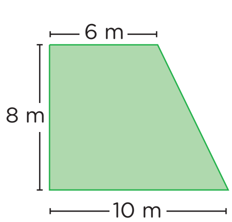


$$A = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$$

b_1: base menor
b_2: base mayor
h: altura
A: Área del trapecio

Ejemplo

La pista de baile de un local de festividad (ver figura) será cambiada por cerámica y se requiere saber cuánta superficie será cubierta.



¿Cuánta cerámica se necesitará?

$$A = \frac{(6 + 10) \cdot 8}{2} = 64 \text{ m}^2$$

Respuesta: Se necesitarán 64 m² de cerámica.

12. Determina el área verde total.

13. Calcula el costo de la inversión por la compra de césped.

14. Responde las preguntas de la situación.

Reflexionamos sobre el desarrollo

15. ¿Qué ventajas representa la descomposición de una figura compuesta en figuras geométricas conocidas? Explica.

16. ¿En qué otras figuras geométricas conocidas se puede descomponer el área verde? Dibuja.

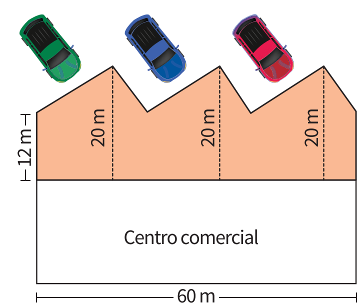
Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

Expresamos con dibujos y lenguaje geométrico nuestra comprensión sobre las propiedades de las formas geométricas para interpretar un problema según su contexto y establecer relaciones entre representaciones. Asimismo, planteamos afirmaciones sobre las relaciones de las formas geométricas.

Situación A: Césped para las áreas verdes

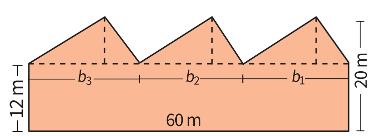
Al frente del centro comercial Las 3 B, Bueno, Bonito y Barato, hay una vereda junto a la cual se estacionan los autos, tal como se aprecia en la figura. Si los dueños de dicho centro comercial deciden convertir la vereda en área verde, ¿cuántos metros cuadrados de césped natural necesitarán?



A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Observamos que la zona que desean convertir en área verde es una figura compuesta, por lo que trazamos una línea horizontal y encontramos tres triángulos de 8 m de altura y un rectángulo de 60 m de largo por 12 m de ancho.



Calculamos el área total de la zona que se va a convertir en área verde:

$A_{\text{rectángulo}} = 60 \times \_\_\_\_ = 720 \text{ m}^2$

$A_{\text{triángulos}} = \dfrac{b_1 \times \_\_\_\_}{2} + \dfrac{b_2 \times 8}{2} + \dfrac{b_3 \times 8}{2}$

$A_{\text{triángulos}} = b_1 \times 4 + b_2 \times 4 + b_3 \times \_\_\_\_$

Factorizando, se obtiene:

$A_{\text{triángulos}} = \_\_\_\_ \times (b_1 + b_2 + b_3)$

Del gráfico, se observa lo siguiente:

$b_1 + b_2 + b_3 = 60 \text{ m}$

Entonces, reemplazando, se obtiene:

$A_{\text{triángulos}} = \_\_\_\_ \times 60 = 240 \text{ m}^2$

Finalmente, el área pedida será:

$A_{\text{total}} = 720 + \_\_\_\_ = 960 \text{ m}^2$

Respuesta: Se necesitarán ____ m² de césped natural.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

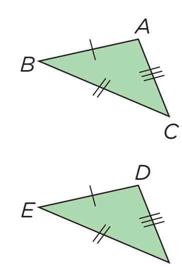
1. Describe el procedimiento que se realizó para responder la pregunta de la situación.

2. Realiza otro procedimiento para responder la pregunta de la situación.

Recuerda

Criterio de congruencia LLL

Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados correspondientes de igual longitud.



Se cumple lo siguiente:

$AB = DE$

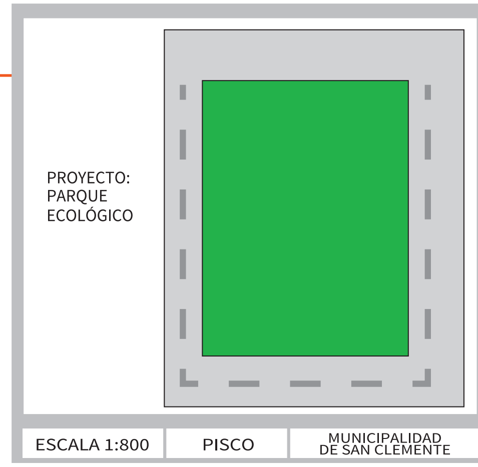
$AC = DF$

$BC = EF$

Entonces: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Situación B: Arborización del terreno

El alcalde del distrito de San Clemente, en Pisco, proyecta convertir un terreno de su localidad en un parque ecológico. Para ello, en su plano a escala de 1:800, dispone de una zona rectangular para plantar árboles que necesitan de 4 m² cada uno para desarrollarse. De acuerdo a la escala y a las medidas del plano, ¿cuántos árboles se pueden plantar en dicha zona?



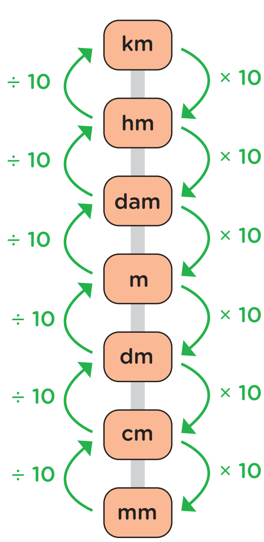
Recuerda

Estrategia para convertir unidades de longitud

Al pasar de una unidad de longitud menor a otra mayor, dividimos por una potencia de 10; el exponente será igual a la cantidad de lugares que hay entre las unidades involucradas. Si se desea pasar de una unidad mayor a otra menor, se multiplica en vez de dividir.

Ejemplo
Convierte 6000 cm a metros.

Resolución
De acuerdo con el gráfico, son dos lugares.



$6000 \div 10^2 = 60$ m

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

- Usando una regla, medimos las dimensiones de la zona destinada para árboles:

  Largo: 5 cm   Ancho: 4 cm

- Hallamos las dimensiones reales de la zona para árboles:

  Largo: $\frac{1}{800} = \frac{5}{x}$; entonces, $x =$ .... cm, que equivale a 40 m.

  Ancho: $\frac{1}{800} = \frac{4}{y}$; entonces, $y = 3200$ cm, que equivale a ..... m.

- Calculamos el área real de la zona exclusiva para plantar árboles:

  $A =$ ...... m × 32 m = 1280 m²

- Finalmente, encontramos el número de árboles que se podrán plantar:

  $\frac{1280}{4} = 320$ árboles

Respuesta: Se pueden plantar 320 árboles.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

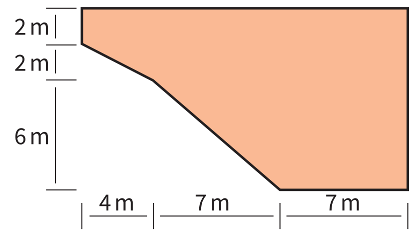
1. Describe el procedimiento realizado para dar respuesta a la pregunta de la situación.

2. ¿Podrías realizar otro procedimiento para responder la pregunta de la situación? Explica cuál sería.

Aprendemos a partir del error

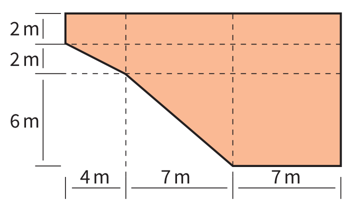
Situación C: Recubriendo superficies

La Municipalidad de Zorritos, en Tumbes, va a cambiar las mayólicas de su piscina municipal. Esta tiene una forma singular, tal como se observa en la imagen (vista desde arriba); su perímetro mide aproximadamente 51 m y tiene una profundidad constante de 1,3 m. ¿Cuántos metros cuadrados de mayólica se necesita comprar para cubrir todas las superficies interiores?



Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución



- Trazamos en la figura líneas horizontales y verticales, y obtenemos así figuras conocidas.
- Observamos que el área del piso de la piscina está conformada por seis rectángulos y dos triángulos.
- Además, debemos tener en cuenta las caras laterales de la piscina, porque estas también serán revestidas de mayólica. Su área total es igual al perímetro de la piscina por su altura.

$A_{\text{total}} = A_{6\text{ rectángulos}} + A_{2\text{ triángulos}} + A_{\text{caras laterales}}$

$A_{6\text{ rectángulos}} = 4 \times 2 + 7 \times 2 + 7 \times 2 + 7 \times 2 + 7 \times 2 + 7 \times 6$

$A_{6\text{ rectángulos}} = 8 + 14 + 14 + 14 + 14 + 42$

$A_{6\text{ rectángulos}} = 106\text{ m}^2$

$A_{2\text{ triángulos}} = \dfrac{4 \times 2}{2} + \dfrac{7 \times 6}{2} = 4 + 21 = 25\text{ m}^2$

$A_{\text{caras laterales}} = 51 \times 1{,}3 = 66{,}3\text{ m}^2$

$A_{\text{total}} = 106 + 25 + 66{,}3 = 197{,}3\text{ m}^2$

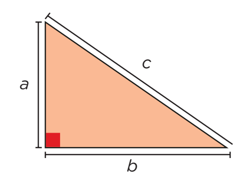
Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. Verifica el procedimiento y corrígelo.

2. ¿Podrías realizar otro procedimiento para dar respuesta a la pregunta de la situación? Explica cuál sería.

Ten en cuenta

Según el teorema de Pitágoras, en todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

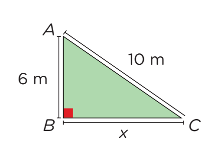


$(\text{cateto }1)^2 + (\text{cateto }2)^2 = \text{hipotenusa}^2$

$a^2 + b^2 = c^2$

Ejemplo

Halla el valor de x.



Resolución

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$6^2 + x^2 = 10^2$

$x^2 = 100 - 36$

$x = \sqrt{64}$

$x = 8\text{ m}$

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito

Establecemos relaciones entre las características medibles de objetos. Expresamos con dibujos y lenguaje geométrico nuestra comprensión de las propiedades de las formas geométricas. Seleccionamos estrategias heurísticas para determinar la longitud y el área de formas geométricas compuestas y planteamos afirmaciones sobre sus propiedades.

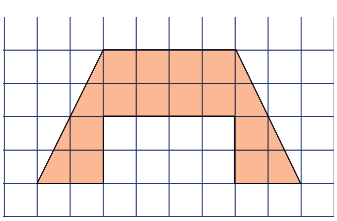
Ten en cuenta

Un polígono irregular tiene lados de diferentes medidas. Este puede descomponerse en varias figuras geométricas más simples.

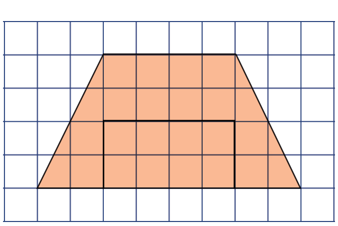
Asimismo, para determinar el área de una figura compuesta, también se puede aplicar la estrategia de completar la figura.

Ejemplo

La siguiente figura representa el terreno de un supermercado.

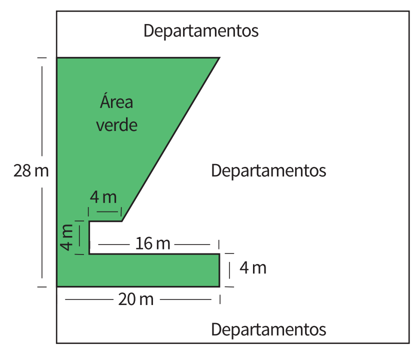


Completamos para formar una figura conocida. Así, resulta:



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Los propietarios de un condominio se preocupan mucho por el cuidado del ambiente; por ello, han considerado una gran área verde, como se muestra en la figura. ¿Cuántos metros cuadrados se han reservado para el área verde?



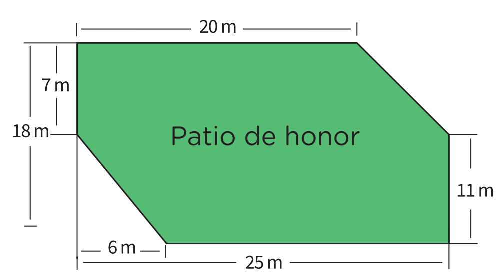
a) 376 m² b) 280 m² c) 360 m² d) 368 m²

2. Una empresa que vende aceite ecológico en botellas de 500 mL desea empacar cajas que contengan dos docenas de envases. Si el diámetro de cada botella es de 8 cm, ¿cuál debe ser el área mínima de la base de la caja?

a) 256 cm² b) 64 cm² c) 4000 cm² d) 1536 cm²

Patio de honor

El siguiente gráfico representa el patio de honor de la I. E. Los Héroes del Perú de Ayacucho.



Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.

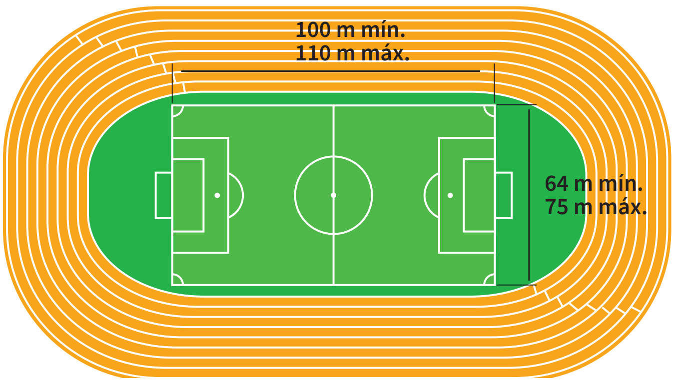
3. Se necesita colocar losetas en todo el patio. ¿Qué cantidad se deberá comprar?

a) 450 m² b) 331,5 m² c) 399,5 m² d) 360 m²

4. Si el patio está completamente lleno y, además, hay cuatro estudiantes por cada metro cuadrado, ¿cuántos estudiantes hay en el patio de honor?

Medidas máximas y mínimas de una cancha de fútbol

La siguiente figura representa la cancha de fútbol de un estadio con sus medidas permitidas.

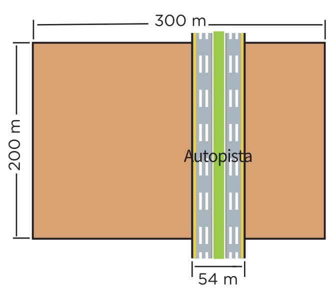


Con la información dada, responde la siguiente pregunta:

5. Si en los extremos de la cancha de fútbol hay dos semicírculos congruentes y se tomaron las dimensiones máximas permitidas, ¿cuántos metros cuadrados aproximadamente de césped artificial se necesitaron para cubrir toda el área verde?

a) 12 665,625 m²
b) 11 915,625 m²
c) 11 455,625 m²
d) 8250 m²

6. Arbilio Gómez es un **benefactor** de su ciudad. Él cedió parte de su terreno al Estado peruano para la construcción de una autopista que lo cruza. ¿Cuántos metros cuadrados mide actualmente su propiedad?



7. La siguiente figura representa un conjunto habitacional. En ella, la parte sombreada corresponde a la superficie que será cubierta de césped artificial.

¿Cuántos metros cuadrados de césped artificial se deben comprar para cubrir toda la superficie destinada para área verde?

a) $3437\ m^2$
b) $3107\ m^2$
c) $3462\ m^2$
d) $3307\ m^2$

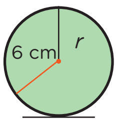
Recuerda

El área del círculo se calcula con esta expresión:

$$\text{Área}_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$$

Ejemplo

Determina el área del círculo mostrado. (Considera π = 3,14).



$A = \pi \cdot r^2$

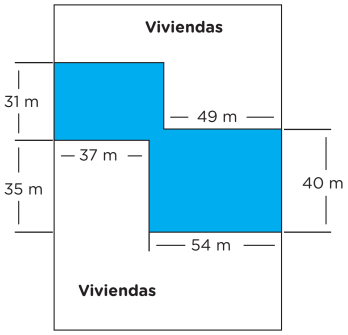
$A = 3{,}14 \times 6^2$

$A = 113{,}04\ cm^2$

Glosario

Un **benefactor** es aquella persona que hace bien a otra.

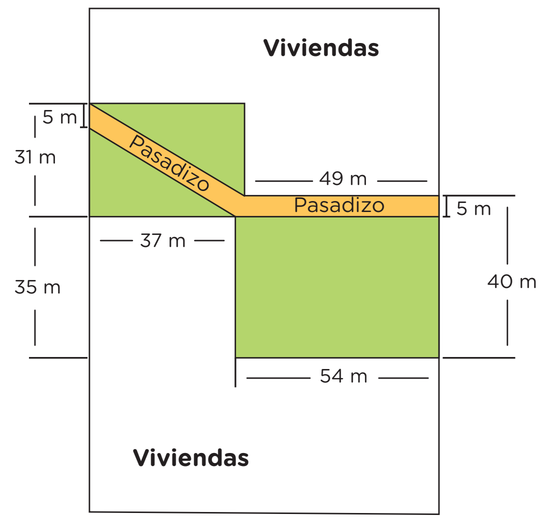
Conjunto habitacional El Progreso



¿Sabías que...?

No es lo mismo superficie que área. La **superficie** es la región del plano que ocupan las figuras, mientras que el **área** corresponde a la medida de la superficie.

8. Si en el área verde los vecinos deciden hacer un pasadizo para el tránsito peatonal, tal como se muestra en la siguiente figura, ¿cuántos metros cuadrados de césped artificial tendrán que comprar ahora?



Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales y las representé con formas bidimensionales compuestas.			
Combiné estrategias heurísticas, recursos y procedimientos para determinar la longitud y el área de formas geométricas compuestas o superficies irregulares en planos empleando unidades convencionales.			
Expresé con dibujos y lenguaje geométrico mi comprensión sobre las propiedades de las formas geométricas para interpretar un problema según el contexto.			
Planteé afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubrí entre las superficies de las formas geométricas basado en experiencias directas.			

¿Cómo evaluamos la satisfacción de los clientes?

Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Representamos las características de la muestra de una población mediante el estudio de variables cuantitativas con medidas de tendencia central como la media. Asimismo, seleccionamos procedimientos para determinar e interpretar la media en un conjunto de datos agrupados.

Evaluamos la atención al cliente

La única entidad bancaria de una comunidad solo dispone de dos ventanillas para atender al público. Ante ello, un grupo de estudiantes del 4.° grado de secundaria de un colegio propone realizar un estudio que evalúe la eficiencia de la atención, para lo cual han registrado el tiempo que se invierte en atender a cada cliente, desde que ingresa al banco hasta que es atendido en una de las ventanillas. Los datos se han representado en la siguiente tabla:

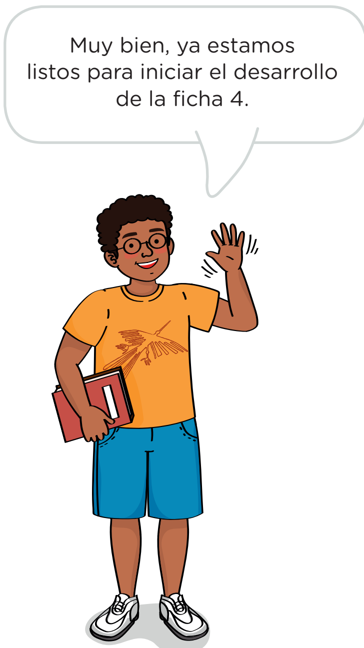
Fuente: Shutterstock

Tiempo (min) $[L_i; L_s[$	Ventanilla 1	Ventanilla 2
[0; 10[	10	18
[10; 20[	12	13
[20; 30[	8	10
[30; 40[	7	5
[40; 50[	10	5
[50; 60[	15	2
[60; 70[	12	4
[70; 80]	16	3

a. ¿Cuál es el tiempo promedio que demora un cliente en la ventanilla 1?

b. ¿Cuál es el tiempo promedio que demora un cliente en la ventanilla 2?

c. ¿A qué conclusión llegarán los estudiantes respecto a la evaluación de la eficiencia de este banco en atención al público?



Ten en cuenta

Para datos no agrupados:

La **media** ($\bar{x}$), también llamada media aritmética o promedio aritmético, se obtiene al sumar todos los datos y dividir dicha suma entre el número total de datos.

La **moda** (Mo) se define como el dato con mayor frecuencia en el conjunto de datos.

La **mediana** (Me) es el valor representativo que ocupa la posición central de los datos ordenados.

Recuerda

Las **variables cuantitativas**, cuyos valores son numéricos, pueden ser de dos tipos:

- **Discretas.** Se obtiene por el procedimiento de conteo, toma valor enteros. Por ejemplo: número de hijos, de árboles, de botellas, etc.

- **Continuas.** Se obtiene por una medición, no necesariamente es entero. Por ejemplo: talla, masa, ingresos económicos, etc.

Comprendemos el problema

1. ¿Cuál es el objetivo del estudio?

2. ¿Qué tipo de variable es el tiempo?

3. ¿Qué datos corresponden a las ventanillas 1 y 2?

4. ¿Cómo se interpretan los datos de [70; 80]?

5. ¿Qué te piden calcular las preguntas de la situación?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

6. De las siguientes medidas de tendencia central, ¿cuál te ayudaría a evaluar la eficiencia de la atención a los clientes del banco?, ¿por qué?

   a) Media b) Mediana c) Moda

7. Describe el procedimiento que realizarías para responder las preguntas de la situación.

Ejecutamos la estrategia o plan

8. Completa la siguiente tabla de frecuencias con los datos que corresponden a la ventanilla 1.

Tiempo (min) $[L_i; L_s[$	X_i	f_i	$X_i \cdot f_i$
[0; 10[	5	10	
[10; 20[	15	12	
[20; 30[			
[30; 40[			
[40; 50[			
[50; 60[			
[60; 70[			
[70; 80]			
Total		90	

9. Según los datos de la tabla anterior, calcula la media y responde la primera pregunta de la situación. Se sugiere emplear la siguiente relación:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i \cdot f_i}{n}$$

10. Completa la siguiente tabla de frecuencias con los datos que corresponden a la ventanilla 2.

Tiempo (min) $[L_i; L_s[$	X_i	f_i	$X_i \cdot f_i$
[0; 10[	5	18	
[10; 20[	15	13	
[20; 30[			
[30; 40[			
[40; 50[			
[50; 60[			
[60; 70[			
[70; 80]			
Total		60	

Ten en cuenta

Sean $X_1, X_2, X_3, ..., X_k$ las marcas de clase de los k intervalos de una distribución; además, sean $f_1, f_2, f_3, ..., f_k$ las frecuencias absolutas de todos los intervalos, respectivamente. Entonces, **la media** o **media aritmética** se calcula así:

$$\bar{x} = \frac{X_1 \cdot f_1 + X_2 \cdot f_2 + X_3 \cdot f_3 + ... + X_k \cdot f_k}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i \cdot f_i}{n}$$

n: número de datos

La marca de clase de un intervalo (X_i) se obtiene de la semisuma de los límites del intervalo:

$$X_i = \frac{L_s + L_i}{2}$$

Donde:

L_s: límite superior
L_i: límite inferior

Límite superior

Masa (kg)	Frecuencia
[60; 65[	40
[65; 70[	38
[70; 75]	52
Total	130

Límite inferior

11. Según los datos de la tabla anterior, calcula la media y responde la segunda pregunta de la situación.

12. Con base en las respuestas de las dos primeras preguntas de la situación, responde la tercera pregunta.

Reflexionamos sobre el desarrollo

13. ¿Qué estrategia te facilitó determinar la media en ambos conjuntos de datos?

14. ¿Por qué se utilizó la media y no otra medida de tendencia central para el presente estudio de la situación? Justifica tu respuesta.

15. ¿Qué recomendaciones crees que los estudiantes le darían al banco después de conocer los resultados del estudio?

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

Expresamos con diversas representaciones nuestra comprensión de la desviación estándar y el significado de los cuartiles en una distribución de datos según el contexto. Asimismo, reconocemos errores en las conclusiones y proponemos mejoras.

Situación A: Convocados a la selección

María ha registrado la estatura (en centímetros) de ocho estudiantes del 4.° grado A y del 4.° grado B para convocarlos a la selección de básquet que participará en los Juegos Deportivos Escolares Nacionales del 2024, organizados por el Ministerio de Educación.

Sección \ Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8
A	148	149,5	154,8	152	156	157,5	160,2	162
B	140,5	143,5	145	153,5	151,6	163,4	167	175,5

Si se necesita elegir a una de las secciones para representar a la institución educativa, ¿cuál será la seleccionada?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

- Calculamos la media de las estaturas en cada sección:

$$\bar{x}_A = \frac{148 + 149{,}5 + 154{,}8 + 152 + 156 + 157{,}5 + 160{,}2 + 162}{8} = \frac{1240}{8} = \boxed{}$$

$$\bar{x}_B = \frac{140{,}5 + 143{,}5 + 145 + 153{,}5 + 151{,}6 + 163{,}4 + 167 + 175{,}5}{8} = \frac{\boxed{}}{8} = 155$$

- Como las medias son iguales, calcularemos ahora la desviación estándar. Para ello, debemos calcular primero la varianza.
- Elaboramos la tabla de frecuencias:

	Estudiantes de la sección A		Estudiantes de la sección B	
Estudiantes	Estatura (cm) (x_i)	$(x_i - \bar{x})^2$	Estatura (cm) (x_i)	$(x_i - \bar{x})^2$
Estudiante 1	148	$(148 - 155)^2 = 49$	140,5	$(140{,}5 - 155)^2 = 210{,}25$
Estudiante 2	149,5	$(149{,}5 - 155)^2 = 30{,}25$	143,5	$(143{,}5 - 155)^2 = 132{,}25$
Estudiante 3	154,8	$(154{,}8 - 155)^2 = 0{,}04$	145	$(145 - 155)^2 = 100$
Estudiante 4	152	$(152 - 155)^2 = 9$	153,5	$(153{,}5 - 155)^2 = 2{,}25$
Estudiante 5	156	$(156 - 155)^2 = 1$	151,6	$(151{,}6 - 155)^2 = 11{,}56$
Estudiante 6	157,5	$(157{,}5 - 155)^2 = 6{,}25$	163,4	$(163{,}4 - 155)^2 = 70{,}56$
Estudiante 7	160,2	$(160{,}2 - 155)^2 = 27{,}04$	167	$(167 - 155)^2 = 144$
Estudiante 8	162	$(162 - 155)^2 = 49$	175,5	$(175{,}5 - 155)^2 = 420{,}25$
Total		$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 171{,}58$		$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 1091{,}12$

Recuerda

Para calcular la varianza de datos no agrupados, se emplea la siguiente expresión:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

La desviación estándar (s) es la raíz cuadrada de la varianza: $s = \sqrt{V}$.

Hallamos la varianza en cada sección:

$$V_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{171{,}58}{8} \approx 21{,}45$$

$$V_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1091{,}12}{8} = 136{,}39$$

Luego, calculamos la desviación estándar en cada caso:

$$s_A = \sqrt{V_A} \approx \sqrt{21{,}45} \approx 4{,}6$$

$$s_B = \sqrt{V_B} = \sqrt{136{,}39} \approx 11{,}7$$

- Las estaturas de los estudiantes de la sección A tienen menor desviación; están más concentradas alrededor de la media. Luego, ellos serán los seleccionados.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. Describe el procedimiento realizado para determinar la media de las estaturas de los estudiantes y las medidas de dispersión.

2. ¿Qué puedes afirmar sobre la desviación estándar de las estaturas de los estudiantes de la sección B?

Situación B: Campaña de salud

Los datos de la masa corporal de 40 estudiantes del cuarto grado de secundaria se muestran en la tabla.

a. Calcula la masa corporal media de los estudiantes e interprétala.

b. Calcula e interpreta el percentil 80.

Masa corporal (kg) $[L_i; L_S[$	f_i
[35,5; 42,5[	2
[42,5; 49,5[	11
[49,5; 56,5[	13
[56,5; 63,5[	9
[63,5; 70,5[	3
[70,5; 77,5]	2

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

En la tabla de distribución de frecuencias, agregamos columnas para determinar la marca de clase y la frecuencia absoluta acumulada.

Masa corporal (kg) $[L_i; L_S[$	X_i	f_i	F_i	$X_i \cdot f_i$
[35,5; 42,5[	39	2	2	
[42,5; 49,5[	46	11	13	
[49,5; 56,5[	53	13	26	
[56,5; 63,5[	60	9	35	
[63,5; 70,5[	67	3	38	
[70,5; 77,5]	74	2	40	
Total		40		

a. Utilizamos la fórmula de la media para datos agrupados:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i \cdot f_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{39 \times 2 + 46 \times 11 + 53 \times 13 + \boxed{} \times 9 + 67 \times 3 + 74 \times 2}{40} = \frac{2162}{40} = \boxed{}$$

Por lo tanto, la masa corporal media de los estudiantes del cuarto grado es 54,05 kg.

b. Para calcular el percentil 80, utilizamos la fórmula del cuantil (C_j):

$$C_j = L_i + \left(\frac{\frac{j \cdot n}{N} - F_{i-1}}{f_i}\right) \cdot A \rightarrow P_{80} = L_i + \left(\frac{\frac{j \cdot n}{N} - F_{i-1}}{f_i}\right) \cdot A$$

Recuerda

Para calcular el percentil, usamos esta fórmula:

$$C_j = L_i + \left(\frac{\frac{j \cdot n}{N} - F_{i-1}}{f_i}\right) \cdot A$$

Donde:

C_j: cuantil j (puede ser cuartil, decil o percentil)

L_i: límite inferior del intervalo del cuantil

n: número total de datos

N: número de partes en que se divide el cuantil

F_{i-1}: frecuencia absoluta acumulada anterior a la del intervalo del cuantil

f_i: frecuencia absoluta del intervalo del cuantil

A: ancho de clase

Ten en cuenta

Los percentiles dividen la distribución de datos en 100 partes iguales; cada parte contiene el 1 % de los datos.

Los percentiles son 99 valores y se nombran con $P_1, P_2, P_3, P_4, ..., P_{99}$.

Donde P_1 se lee "percentil uno".

El percentil (P) divide a la distribución en 100 partes iguales, cada una de las cuales engloba el 1 % de las observaciones.

- Identificamos el intervalo del percentil 80, correspondiente a la primera frecuencia absoluta acumulada (F_i) que contenga el valor de $\frac{j \cdot n}{N}$:

$$\frac{j \cdot n}{N} = \frac{\boxed{} \times 40}{100} = 32$$

- Observamos la columna de la frecuencia absoluta acumulada (F_i) para identificar el intervalo donde se encuentra el percentil 80 (P_{80}). Dicho intervalo es [56,5; 63,5[, que se observa en la fila pintada de anaranjado en la tabla.

- Calculamos el percentil 80 (P_{80}) reemplazando los valores correspondientes:

$$P_{80} = 56{,}5 + \left(\frac{\frac{80 \times 40}{100} - 26}{9} \right) \times 7 = 56{,}5 + 4{,}666... \approx 61{,}2$$

Interpretación: La masa corporal del 80 % de estudiantes es, como máximo, de 61,2 kg; el 20 % restante tiene una masa corporal mayor que 61,2 kg.

Ahora, respondemos la siguiente pregunta:

1. Describe el procedimiento realizado para determinar la media de las masas corporales de los estudiantes y el percentil 80.

Aprendemos a partir del error

Situación C: Ayuda social

Karina, estudiante del cuarto grado e integrante de una ONG de ayuda social, realiza una encuesta a sus compañeros del colegio para saber cuántos hermanos o hermanas tienen, con la finalidad de ofrecerles ayuda social. Los resultados de la encuesta son los siguientes:

3 - 2 - 4 - 5 - 4 - 1 - 3 - 3 - 5 - 2 - 3 - 6 - 2 - 4 - 5
3 - 4 - 3 - 3 - 4 - 2 - 2 - 4 - 2 - 2 - 2 - 4 - 2 - 7 - 5

Calcula la desviación estándar a partir de una distribución de frecuencias, considerando tres intervalos de clase, e interpreta dicho valor.

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

- Elaboramos la tabla de frecuencias considerando lo siguiente:
  - Hallamos el rango: $R = 7 - 1 = 6$.
  - Calculamos la amplitud (donde $K = 3$ intervalos):

$$A = \frac{R}{K} = \frac{6}{3} = 2$$

  - Determinamos la marca de clase y la frecuencia de cada intervalo obtenido.

N° de hermanos $[L_i; L_s[$	X_i	f_i	$X_i - f_i$
[1; 3[	2	10	
[3; 5[	4	14	
[5; 7]	6	6	
Total		30	

- Ahora calculamos la media de datos agrupados:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i \cdot f_i}{n} = \frac{2 \times 10 + 4 \times 14 + 6 \times 6}{30} = \frac{112}{30} = 3{,}7333... \approx 3{,}73$$

- Luego, hallamos la varianza usando esta fórmula:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{k} |X_i - \bar{x}|^2 \cdot f_i}{n}$$

$$\frac{|2 - 3{,}73|^2 \times 10 + |4 - 3{,}73|^2 \times 14 + |6 - 3{,}73|^2 \times 6}{30}$$

$$\frac{(-1{,}73)^2 + (0{,}27)^2 + (2{,}27)^2}{30} = \frac{(-1{,}73 + 0{,}27 + 2{,}27)^2}{30}$$

$$1{,}156666 \rightarrow s = \sqrt{1{,}56666} \approx 1{,}25$$

Respuesta: Por tanto, la desviación estándar es 1,25.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. ¿Es correcto el procedimiento en la resolución de la situación? Explica.
2. En el caso de que hubiera errores en el procedimiento, ¿cuáles serían sus correcciones?

Ten en cuenta

Los intervalos de clase se emplean para agrupar datos de variables cuantitativas continuas como el tiempo, el ingreso económico, la talla, la masa corporal, etc.

Para calcular la varianza de datos agrupados, se emplea la siguiente expresión:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{k} (X_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}$$

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito

Representamos las características de la muestra de una población mediante el estudio de variables con medidas de tendencia central. Seleccionamos procedimientos para determinar e interpretar la media en un conjunto de datos agrupados. Expresamos nuestra comprensión de la desviación estándar y justificamos afirmaciones sobre otras medidas de localización.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

Una distribuidora de artefactos eléctricos tiene cinco tiendas (A, B, C, D y E). Las ventas de cada tienda en el verano, en miles de soles, se muestran en la siguiente tabla, la cual tiene algunas casillas sin información para que las completes. Se incluyen, además, los promedios por tienda y por mes.

Tiendas \ Meses	Enero	Febrero	Marzo	Promedio
A	36	41	55	44
B	28	39		39
C	23		38	
D	85	32	72	63
E	73		45	55
Promedio	49	37		

Recuerda

Si conoces el promedio de un grupo de datos, pero desconoces uno de los valores, siempre es posible determinar el valor faltante.

Ejemplo

Las cantidades de celulares vendidos en tres días son 35, 27 y 30. ¿Cuántos celulares se deben vender el cuarto día para tener un promedio de venta de 32 celulares?

Resolución

Sea x la cantidad de celulares que se venden el cuarto día. Entonces:

$$\frac{35 + 27 + 30 + x}{4} = 32$$

$$92 + x = (32)(4)$$

$$\rightarrow x = 36$$

Respuesta: El cuarto día se deben vender 36 celulares.

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. ¿Cuánto vendió la tienda D en febrero?

   a) S/26 000 b) S/32 000 c) S/28 000 d) S/36 000

2. ¿Cuál es la diferencia en ventas (en soles) entre la tienda que más vendió en el verano y la que menos vendió?

   a) S/24 000 b) S/72 000 c) S/34 000 d) S/102 000

3. Un estudiante de una universidad, en uno de sus cursos, debe rendir cinco prácticas, un examen parcial y un examen final. El siguiente cuadro muestra los puntajes de sus cinco prácticas y de su examen parcial.

P1	P2	P3	P4	P5	Ex. parcial	Ex. final
12	14	11	12	11	16	

El puntaje final del curso se obtiene asignando ciertos pesos al promedio de prácticas, al examen parcial y al examen final. Estos pesos son 40 %, 30 % y 30 %, respectivamente.

¿Cuál es el puntaje mínimo que debe obtener el estudiante en su examen final para que el puntaje final del curso sea, por lo menos, 15?

a) 16 b) 18 c) 17 d) 19

4. Las estaturas de los estudiantes del 4.° G de la Institución Educativa Emblemática Carlos Wiesse se han registrado en una tabla. Calcula e interpreta el cuartil uno y el cuartil medio.

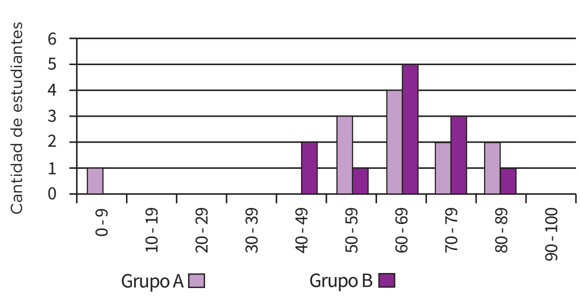
Estatura (m) $[L_i; L_S[$	f_i	F_i
[1,38; 1,46[	2	
[1,46; 1,54[	4	
[1,54; 1,62[	9	
[1,62; 1,70[	11	
[1,70; 1,78]	4	
Total		

5. Desde la selva peruana se suelen transportar frutas en camiones que se dirigen por todo el país. La tabla de frecuencias mostrada representa la cantidad de gasolina que consume una flota de camiones diariamente.

¿En qué intervalo se encuentra el percentil 20? ¿Qué significa ese valor?

Gasolina (galones) $[L_i; L_S[$	f_i
[10; 20[	8
[20; 30[	15
[30; 40[	11
[40; 50[	17
[50; 60]	25

6. El siguiente diagrama muestra los resultados de un examen de matemática aplicado a dos grupos, A y B, de una institución educativa. La puntuación media del grupo A es 62,0 y la del grupo B es 64,5. Los estudiantes aprueban este examen cuando su puntuación es 50 o más.



Al observar el diagrama, el profesor afirma que en este examen el grupo B fue mejor que el grupo A.

Los estudiantes del grupo A están en desacuerdo con su profesor, por lo que intentan convencerlo de que el grupo B no tiene por qué haber sido necesariamente el mejor en este examen. Da un argumento matemático, utilizando la información del diagrama, que puedan utilizar los estudiantes del grupo A para sustentar su posición.

Ten en cuenta

Los cuartiles son medidas de localización que describen la posición que tiene un dato específico en relación con los demás datos.

Los cuartiles dividen la distribución en cuatro partes iguales; cada parte contiene el 25 % de los datos.

25 % 25 % 25 % 25 %

Q_1 Q_2 Q_3

Ejemplo

Calcula el Q_2 en la distribución siguiente:
1; 1; 1; 1; 2; 2; 3; 4; 5; 5; 5; 6; 7; 8; 9; 9

Resolución

Como hay 16 elementos (número par), Q_2 es la media aritmética de 4 y 5, pues es el centro de los datos.

Entonces, Q_2 = 4,5. Este valor coincide con la mediana (Me).

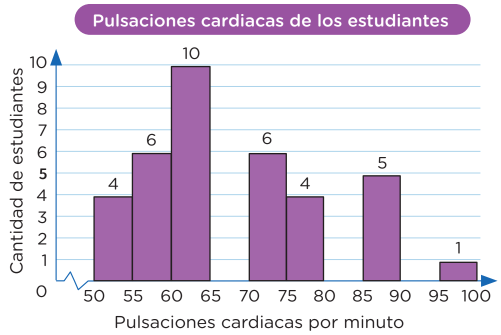
7. La masa corporal media de un equipo de fútbol americano es 245 libras, con una desviación estándar de 18 libras; mientras que la masa corporal media y la desviación estándar del equipo rival son 195 y 12 libras, respectivamente. ¿Cuál de los dos equipos muestra la mayor dispersión relativa respecto a la masa corporal promedio?

(Dispersión relativa: $\frac{\text{desviación estándar}}{\text{media}} \times 100\ \%$)

a) El equipo de fútbol americano
b) Tienen la misma dispersión
c) El equipo rival
d) Ninguno de los dos equipos

8. Las pulsaciones cardiacas por minuto de un grupo de 36 estudiantes de un salón de 4.° grado de secundaria se muestran en el diagrama.

Construye la tabla de distribución de frecuencias; luego, calcula e interpreta las medidas de dispersión.

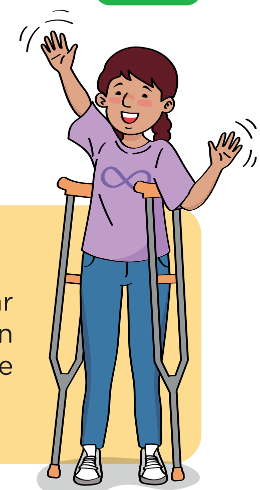


Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Representé las características de la muestra de una población mediante el estudio de variables con medidas de tendencia central.			
Expresé con diversas representaciones mi comprensión de la desviación estándar.			
Seleccioné procedimientos para determinar e interpretar la media en un conjunto de datos agrupados.			
Justifiqué con ejemplos y conocimientos estadísticos afirmaciones sobre medidas de localización.			

¿Cómo tomamos decisiones empleando la regla de interés?



Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Establecemos relaciones entre datos y acciones de comparar e igualar cantidades o trabajar con tasas de interés simple. Asimismo, expresamos con diversas representaciones y lenguaje numérico nuestra comprensión sobre algunos términos financieros.

Elección de un crédito hipotecario

Durante los últimos años en nuestro país, se ha observado una significativa cantidad de ofertas inmobiliarias debido a la explosión demográfica, dado que la población del Perú, según el censo del 2017 del Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI), supera los 31 millones de habitantes.

La familia Álvarez Buendía encuentra una vivienda valorizada en S/250 000. Para financiarla, disponen de tres entidades bancarias, las cuales proponen las condiciones que se muestran en la tabla.

Entidad bancaria	Cuota inicial	Tasa de interés anual	Tiempo (años)
Banco A	10 %	15 %	20
Banco B	20 %	13 %	25
Banco C	0 %	10 %	30

Fuente: Shutterstock

Si las tres entidades bancarias ofrecen financiar la vivienda con interés simple, ¿cuál de ellas le convendría elegir a la familia Álvarez Buendía? Justifica tu respuesta.

Ten en cuenta

En el caso de que no se especifique el periodo de aplicación de la tasa, debemos considerar que se trata de una tasa anual. Por ejemplo, "una tasa de 8,2 %" representa una tasa del 8,2 % anual.

Recuerda

Tasas equivalentes

Dos o más tasas periódicas de interés son equivalentes si producen el mismo interés efectivo al final de cualquier periodo.

Ejemplo:

20 % semestral <> 40 % anual
5 % mensual <> 10 % bimestral
27 % trimestral <> 9 % mensual
12 % trimestral <> 24 % semestral

Comprendemos el problema

1. ¿Cuál es el valor de la vivienda que la familia Álvarez Buendía desea financiar y en cuántos años como máximo podrían hacerlo?

2. ¿Cuál es la tasa de interés que ofrece cada uno de los bancos por financiar la vivienda?

3. ¿Qué te pide la pregunta de la situación?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

4. Analiza esta situación: Carolina le presta S/500 a su hermana, durante tres meses, con la condición de que ella le pague el 10 % mensual. Determina la ganancia total de Carolina y cuánto recibirá en total al final del préstamo.

La cantidad prestada (el capital) es S/500.

C = S/500

El capital permanecerá constante durante los tres meses.

El préstamo dura tres meses.

t = 3 meses

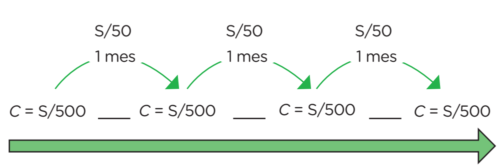
Además, r = 10 % mensual.

Cada mes, Carolina ganará el 10 % del capital prestado (C).

Ahora vamos a deducir la fórmula del interés simple:

Ganancia de cada mes < > interés mensual

10 % de S/500 = S/50



El capital no cambia, es constante.

Se observa que la ganancia total equivale al interés total:

Interés (I) = S/50 + S/50 + S/50 = S/150
= 3 × S/50
= 3 × 10 % (500)

capital (C)

tiempo (t)

tasa (r)

Entonces, podemos deducir la fórmula para el interés simple:

Interés (I) = tiempo (t) · tasa (r) · capital (C)

$$I = C \cdot r \cdot t$$

Luego, tenemos lo siguiente:

Total al final del préstamo < > Monto

Total = (Cantidad que se prestó) + (Cantidad que se ganó)

Total = S/500 + S/150 = S/650

Por lo tanto, la ganancia de Carolina es S/150 y, al final del préstamo, habrá recibido S/650 en total.

5. Observa el siguiente ejemplo: Juan Carlos solicita un préstamo de S/2000 a una tasa de interés simple del 10 % anual para pagarlo en 4 años. ¿Cuál será el monto total que pagará al finalizar el préstamo?
En la siguiente tabla se muestran los intereses que Juan Carlos pagará durante los cuatro años.

Año	Capital (C)	Interés por cada año ($C \cdot r$)
Año 1	S/2000	2000 × 10 % = 2000 × 0,10 = S/200
Año 2	S/2000	2000 × 10 % = 2000 × 0,10 = S/200
Año 3	S/2000	2000 × 10 % = 2000 × 0,10 = S/200
Año 4	S/2000	2000 × 10 % = 2000 × 0,10 = S/200

Luego, determinamos el monto final (M):

$\boldsymbol{M = C + I}$

$M = 2000 + 800$

$M = 2800$

El monto final que Juan Carlos pagará por el dinero prestado es S/2800.

6. Utiliza el siguiente esquema para hallar el porcentaje del valor de la vivienda que financiaría el banco A. Completa los espacios en blanco y realiza las operaciones adecuadas.

Cantidad a financiar por el banco A

$$\boxed{90\ \%\ (250\,000)} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \boxed{} = \boxed{}$$

Recuerda

Tasa de interés (r)
Es la ganancia que se obtiene por cada 100 unidades monetarias prestadas en la unidad de tiempo establecida.
Por ejemplo:

Una tasa del 10 % anual implica que cada año se ganará S/10 por cada S/100 prestados.

Una tasa del 4 % semestral implica que cada seis meses se ganará S/4 por cada S/100 prestados.

Interés (I)
Es la ganancia o beneficio que produce el capital impuesto durante cierto tiempo y bajo determinadas condiciones.

Monto (M)
Es la cantidad que se obtiene al sumar el capital y el interés obtenido en un determinado tiempo:
$M = C + I$.

En diversas situaciones cotidianas se requiere la estrategia de realizar esquemas para comprender mejor las situaciones y los procesos. Un esquema apunta a encontrar una estrategia de solución.

La estrategia de realizar diagramas tabulares (tablas) se emplea cuando se brinda información sobre características que relacionan dos grupos.

Ten en cuenta

Si la cuota inicial es del 10 %, entonces el porcentaje a financiar es

100 % − 10 % = 90 %.

40 % de 250 000

Expresamos:

(0,40) × 250 000
100 000

Por lo tanto, el 40 % de 250 000 es 100 000.

Recuerda

Podemos establecer equivalencias entre porcentajes, fracciones y decimales:

$$30\ \% \equiv \frac{30}{100} = 0{,}30$$

$$45\ \% \equiv \frac{45}{100} = 0{,}45$$

7. Utiliza el siguiente esquema para hallar el interés aplicable por el banco A. Completa los espacios en blanco y realiza las operaciones adecuadas.

Cantidad a financiar por el banco A		Tasa de interés del banco A		Tiempo	→	Interés del banco A
	×		×		=	

8. ¿Qué procedimiento emplearías para determinar el monto que se pagaría a cada entidad bancaria de la situación?

a) Multiplicar la cantidad a financiar por la cuota inicial y la tasa de interés, y sumar el tiempo.

b) Hallar el porcentaje de la cuota inicial y calcular el interés y el monto que se pagará a la entidad bancaria.

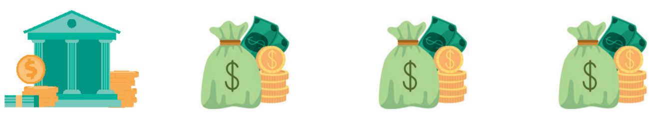
c) Determinar la cantidad a financiar por el banco; luego, calcular el interés de esta cantidad y hallar el monto que se pagará.

Ejecutamos la estrategia o plan

9. Completa el esquema, determina el porcentaje que cada entidad bancaria financiará y luego expresa dicha cantidad en soles.

Valor de la vivienda	Entidad financiera	Porcentaje a financiar	Cantidad a financiar (S/)
	A	90 %	225 000
S/250 000	B		
	C		

10. Completa el esquema para determinar el monto que se pagará en cada entidad financiera.



Entidad financiera	Cantidad a financiar (S/)	Interés simple en t años (S/)	Monto (S/)
A	225 000	675 000	900 000
B			
C			

11. ¿En qué entidad bancaria le convendría a la familia Álvarez Buendía financiar su vivienda?

Reflexionamos sobre el desarrollo

12. ¿De qué otra manera podrías obtener la respuesta de la situación? Realiza un comentario.

13. ¿Qué otro criterio hubiera podido tener en cuenta la familia Álvarez Buendía para elegir el banco adecuado?

Formalización

El **interés simple** es la tasa que se aplica sobre el capital de origen. Este es constante hasta el final de todo el proceso de préstamo.

Para calcular el interés simple, tenemos la siguiente fórmula:

$$I = C \cdot r \cdot t$$

Donde:

I: interés producido
C: capital
r: tasa de interés
t: tiempo

Ejemplo

¿Cuánto es el interés que se pagará por un préstamo de S/2000 al 4 % anual durante 2 años?

$I = 2000 \times 0{,}04 \times 2$
$I = 160$ soles

Además, para calcular el monto (M), tenemos:

$$M = C + I$$

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

Seleccionamos y adaptamos estrategias de cálculo y procedimientos diversos para realizar operaciones con tasas de interés simple o compuesto. Asimismo, comprobamos o descartamos la validez de una afirmación.

Situación A: Préstamo para vivienda

Para la cuota inicial de una vivienda, Ernesto desea solicitar un préstamo de S/60 000 para pagarlo en 5 años, con una tasa de interés simple del 0,5 % mensual. ¿Cuánto es el monto y el interés que pagará por el préstamo al cabo de los cinco años?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

- Identificamos los términos financieros de la situación planteada y completamos la tabla.

Capital (C)	
Tasa de interés (r)	
Tiempo (t)	

- Luego, hallamos el interés en el esquema mostrado.

Capital		Tasa de interés		Tiempo →		Interés
	×		×		=	

$I =$ ....

- Calculamos el monto, que es el capital más el interés:
$M = C + I =$ ....

Respuesta: Ernesto pagará .... por el interés del préstamo, y el monto será de ....

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

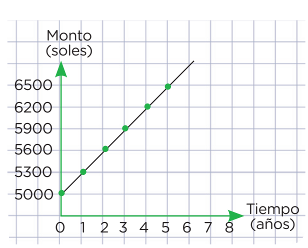
1. ¿Por qué la tasa de interés tiene que ser anual?

2. Describe el procedimiento realizado en la resolución de la situación.

Ten en cuenta

El interés es directamente proporcional al capital, a la tasa de interés y al tiempo. Por ejemplo, dado el capital (S/5000) y a la tasa (6 %), los intereses son directamente proporcionales a los tiempos.

El interés es proporcional al tiempo		
Tiempo		Interés
1 año	→	S/300
2 años	→	S/600
3 años	→	S/900
4 años	→	S/1200
5 años	→	S/1500



Situación B: Compra de un camión

La familia Huamaní Díaz desea adquirir un camión valorizado en S/150 000 para transportar la fruta que se produce en su huerta. Como no tienen el dinero suficiente, solicitan un préstamo a una entidad financiera, la cual les ofrece el crédito de S/150 000 para pagarlos durante 10 años en cuotas mensuales de S/2400. ¿Cuánto de interés pagará la familia Huamaní Díaz por el préstamo? ¿A qué tasa de interés simple se otorga el crédito?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

- Hallamos el monto que pagará la familia Huamaní Díaz:

  $M =$ ....

- Identificamos los datos para determinar el interés ganado:

  Capital (C) = ...

  Monto (M) = ...

  De la relación $M = C + I$, obtenemos:

  $I = M - C =$ ....

- Ahora usamos la fórmula que relaciona la tasa de interés:

$$I = C \cdot r \cdot t$$

De donde: $r = \dfrac{I}{C \cdot t}$

Entonces: $r = \dfrac{138\ 000}{150\ 000 \times 10} = 0{,}092 \times 100\ \% = 9{,}2\ \%$

Respuesta: El interés que pagará la familia Huamaní Díaz será de S/138 000, a una tasa del 9,2 %.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Qué estrategia se utilizó para resolver la situación?

2. Describe el procedimiento realizado en la resolución de la situación.

3. ¿Qué aspectos del procedimiento realizado podrías usar en el caso de que tu familia comprara una vivienda?

Recuerda

El monto (M) es el valor acumulado del capital.

$$M = C + I$$

De la fórmula anterior, podemos despejar el interés:

$$I = M - C$$

Formalización

El **interés compuesto** es el proceso mediante el cual el interés que genera cierto capital en una unidad de tiempo se capitaliza, es decir, se adiciona al capital. Este nuevo monto genera otro interés en la siguiente unidad de tiempo, y así sucesivamente. La fórmula es la siguiente:

$$C_f = C_0 (1 + r)^t$$

Donde:

C_f = monto o capital final

C_0 = capital inicial

r = tasa de interés (en %)

t = número de periodos de capitalización

Aprendemos a partir del error

Situación C: Tomando decisión para un préstamo

En el contexto de la situación mostrada en B, una empresa financiera le propone a la familia Huamaní Díaz una tasa de interés compuesto del 8 % anual, para pagarse en 10 años. ¿Cuánto pagará de interés dicha familia? ¿Pagará más o menos respecto de lo ofrecido en la situación B?

Ten en cuenta

En el interés compuesto, la tasa se aplica sobre un capital que no permanece constante, como consecuencia de un proceso de capitalización de los intereses. Es decir, al cabo de un periodo de capitalización, el interés se acumula al capital, generando así un nuevo capital para el periodo inmediato posterior.

Ejemplo

Juan Carlos solicita un préstamo de S/2000 a una tasa de interés compuesto del 10 %, capitalizable anualmente durante 4 años. En la siguiente tabla se muestran los intereses que Juan Carlos pagará durante los cuatro años.

Año	Capital	Interés
1	S/2000	S/2000 × 0,10 = S/200
2	S/2200	S/2200 × 0,10 = S/220
3	S/2420	S/2420 × 0,10 = S/242
4	S/2662	S/2662 × 0,10 = S/266,2

El interés será:
200 + 220 + 242 + 266,2 = S/928,20

El monto será:
$M = C_f = 2000 + 928,20 =$ S/2928,20

El capital final (C_f), en cada mes, no será el mismo.

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

- Identificamos los términos financieros de esta situación:

$C_0 = 150\ 000$ soles
$r = 8\ \% = \frac{8}{100} = 0,08$
$t = 10$ años

- Aplicamos la fórmula para calcular el capital final:

$C_f = C_0\ (1 + r)^t$
$C_f = 150\ 000(1 + 0,08)^{10}$
$C_f = 323\ 838,75$ soles

- Luego, calculamos el interés:
$I = C_f - C_0 = 323\ 838,75 - 150\ 000 = 273\ 838,75$ soles

Respuesta: La familia Huamaní Díaz pagará S/273 838,75 de interés, que es más de lo que se ofrecía pagar en la situación B.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. Según lo desarrollado, ¿cuál es el error? ¿Cómo puedes corregirlo?

2. ¿Qué entiendes por el término “capitalizable”?

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito

Establecemos relaciones entre datos con tasas de interés simple o compuesto. Asimismo, seleccionamos estrategias diversas para realizar operaciones con tasas de interés. Expresamos con representaciones y lenguaje numérico nuestra comprensión de algunos términos financieros. Planteamos afirmaciones sobre la conveniencia o no de determinadas tasas de interés, y las justificamos con ejemplos.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

José Luis ha recibido una bonificación por sus 10 años de trabajo en una empresa, y ha tomado la decisión de comprar acciones de dos tipos. Las de tipo A generan un interés simple a razón de una tasa de 0,5 % mensual, mientras que las de tipo B producen un interés compuesto del 0,3 % mensual capitalizable trimestralmente.

Con la información dada, responde las preguntas 1, 2, 3 y 4.

1. Si José Luis desea invertir S/10 000 en acciones del tipo A, ¿cuánto de ganancia obtendrá al cabo de seis meses?

   a) S/300   b) S/1200   c) S/600   d) S/3600

2. ¿Cuánto debería invertir José Luis en acciones del tipo B para que, al cabo de seis meses, obtenga una ganancia de S/876?

   a) S/3337,40   c) S/48 448,65
   b) S/12 000   d) S/87 600

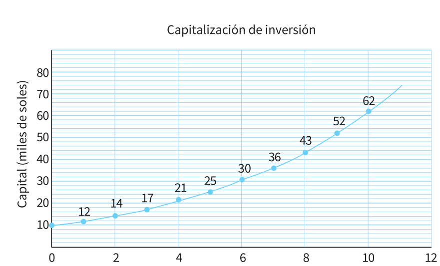
3. ¿A qué tasa de interés compuesto anual la utilidad en un año es la misma para los dos tipos de acciones? (Utiliza una calculadora o una hoja de cálculo).

   a) 1,47 %   b) 3 %   c) 2,95 %   d) 6 %

4. ¿En qué tiempo S/5000 generan una utilidad de S/1640 en acciones del tipo B?

5. El gráfico muestra la capitalización de una inversión a lo largo de los años. ¿Qué representa S/62 000?

   a) Capital final   c) Capital inicial
   b) Interés compuesto   d) Tasa de interés



Recuerda

En un año, se pueden considerar distintos periodos de tiempo:

Semestre: 2 periodos
Trimestre: 4 periodos
Cuatrimestre: 3 periodos
Bimestre: 6 periodos
Mes: 12 periodos

El rendimiento del interés compuesto es mucho mayor que el del interés simple. Esto se debe a que en el interés compuesto el capital se va incrementando debido a la acumulación de los intereses que se van generando; mientras que en el interés simple no ocurre eso, ya que el interés es constante y se calcula únicamente sobre el capital invertido.

6. Determina el valor de un capital que, colocado a una tasa de interés compuesto del 8 % anual, produce un monto de S/26 500 luego de 3 años con una capitalización semestral.

7. ¿Cuál será la tasa de interés compuesto anual a la que se tendrá que colocar un capital de S/3780 para que luego de 48 meses se convierta en S/6804?

a) 15,83 % b) 24 % c) 20 % d) 25,83 %

8. Calcula el capital final generado por un capital inicial de S/9500, durante 6 años, colocados a una tasa del 15 % capitalizable anualmente.

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos y trabajé con tasas de interés simple o compuesto.			
Expresé con lenguaje numérico mi comprensión sobre los términos financieros (monto, capital, interés, tasa de interés, capitalización).			
Seleccioné estrategias de cálculo y procedimientos diversos para determinar el interés simple o compuesto.			
Planteé y comparé afirmaciones sobre la conveniencia o no de determinadas tasas de interés, y las justifiqué con ejemplos.			

¿Cómo solucionamos problemas de la vida cotidiana empleando sistemas de ecuaciones lineales?

Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Establecemos relaciones y las transformamos en expresiones algebraicas o gráficas que incluyen un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Empleamos estrategias heurísticas para determinar términos desconocidos. Justificamos con ejemplos las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Mi emprendimiento en la venta de chocolates

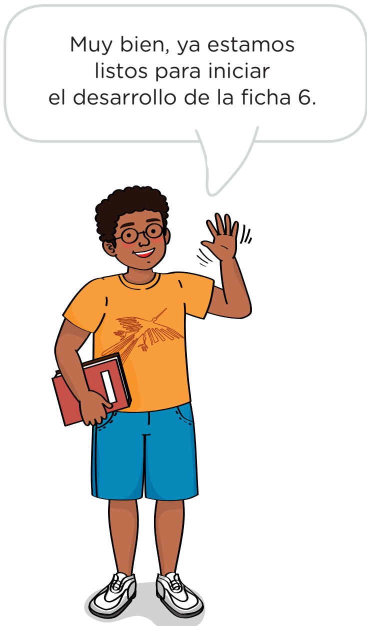
Marisol, Luis y María, estudiantes de 4.° grado de secundaria, asistieron a un evento del Salón del Cacao y Chocolate para conocer la fabricación y comercialización de presentaciones del chocolate de leche, chocolate *bitter* y chocolate de taza. Ellos quieren formar su propio emprendimiento, para ello, de sus ahorros pueden juntar S/450. En el evento lograron anotar que solo el costo de cada caja grande de chocolates es S/5, y el costo de una caja pequeña S/3. Los estudiantes quieren completar 100 cajas en total, pero para saber cuánto ganarán es preciso conocer las cantidades de cada caja, así que realizaron algunos planteamientos y cada uno llegó a las siguientes conclusiones:

- María: se prepararán 50 cajas grandes y 50 cajas pequeñas.
- Luis: se prepararán 65 cajas grandes y 35 cajas pequeñas.
- Marisol: se prepararán 75 cajas grandes y 25 cajas pequeñas.

Fuente: Andina

Respecto a lo mencionado, responde.

¿Quién tiene la razón? Justifica tu respuesta.



Comprendemos el problema

1. ¿Qué desean realizar María, Luis y Marisol?

2. ¿Qué te pide la situación inicial?

3. ¿Qué datos se tienen para responder la pregunta de la situación inicial?

4. ¿Qué afirmaciones realizan María, Luis y Marisol, respectivamente?

Ten en cuenta

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones que contienen las mismas variables.
Una **solución** de un sistema es una asignación de valores de las variables que hacen que cada una de las ecuaciones del sistema se cumpla.

Resolver un sistema quiere decir encontrar todas las soluciones del sistema.
Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ x + 4y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Puedes comprobar que $x = 3$ y $y = 1$ es una solución de este sistema.

Ecuación 1

$$2x - y = 5$$
$$2(3) - 1 = 5$$

Ecuación 2

$$x + 4y = 7$$
$$3 + 4(1) = 7$$

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

5. Una de las primeras acciones es traducir enunciados de un lenguaje verbal a un lenguaje matemática, para ello, emplea la estrategia de planteo de ecuaciones. Observa algunos ejemplos:

Lenguaje verbal	Lenguaje matemático
El doble del número de cajas, disminuido en 8	Sea el número de cajas: x Doble del número de cajas: $2x$ El doble del número de cajas, disminuido en 8: $2x - 8$
Un número aumentado en $\frac{2}{5}$	Sea x el número $\rightarrow x + \frac{2}{5}$
Un número aumentado en sus $\frac{2}{5}$	Sea x el número $\rightarrow x + \frac{2}{5}(x)$
Costo total de n maletas a S/45 cada una	Sea el número de cajas: n Sea el costo de cada maleta: S/45 Costo total: S/45n
La cantidad total de cajas de papaya y manzana	Sea el número de cajas de papaya: x Sea el número de cajas de manzana: y Costo total: $x + y$

6. ¿Cuál podría ser un procedimiento para resolver la situación inicial?

a) Identificar los datos, expresar las cantidades desconocidas en términos de variables, organizar la información en una tabla, establecer el sistema de ecuaciones, resolver el sistema de ecuaciones e interpretar los resultados.

b) Despejar la incógnita, sustituir la expresión hallada, graficar cada ecuación, hallar los puntos de intersección e interpretar los resultados.

c) Expresar todas las cantidades desconocidas en términos de variables, ajustar los coeficientes, sumar las ecuaciones e interpretar los resultados.

Ejecutamos la estrategia o plan

7. Según la situación planteada, tienes los siguientes datos:
Dinero disponible: S/............
Número de cajas: ....
Costo de ingredientes para una caja grande: ....
Costo de ingredientes para una caja pequeña: ....

8. Determina las variables que se presentan en la situación inicial.
Cantidad de cajas grandes: ....
Cantidad de cajas pequeñas: ....

9. Completa la tabla para organizar la información de la situación inicial.

	Caja chica	Caja grande	Total
Costo total de ingredientes (S/)	....	$5x$	....
Cantidad de cajas	y	....	100

10. Establece el sistema de ecuaciones con los datos que se organizaron en la tabla.

11. Resuelve el sistema de ecuaciones y responde la pregunta de la situación inicial.

Reflexionamos sobre el desarrollo

12. ¿Cómo verificas si las expresiones matemáticas formuladas están bien planteadas? Explica.

13. ¿Es posible obtener la misma solución utilizando otro método? Explica.

Recuerda

Los métodos para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales son los siguientes:

Método de reducción
Método gráfico
Método de igualación
Método de sustitución

Ten en cuenta

Para aplicar el **método de reducción**, observa la resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{...(I)} \\ x + 4y = 7 & \text{...(II)} \end{cases}$$

Multiplica la ecuación (I) por (4), entonces tienes
$8x - 4y=20$
Suma la ecuación obtenida con la ecuación (II) y resuelve:

$$8x - \cancel{4y} = 20$$
$$x + \cancel{4y} = 7$$

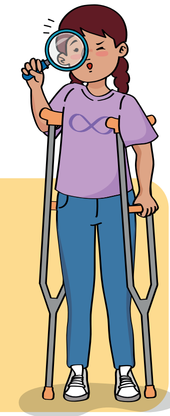
$$9x = 27$$
$$x = 3$$

Sustituye $x = 3$ en la ecuación (II) para calcular el valor de y:

$$x + 4y = 7$$
$$3 + 4y = 7 \rightarrow y = 1$$

Por lo tanto, el conjunto solución del sistema de ecuaciones es $\{(3; 1)\}$.

Comprobamos nuestros aprendizajes



Propósito

Expresamos, con diversas representaciones gráficas, tabulares, simbólicas y con lenguaje algebraico, la comprensión sobre las soluciones del sistema de ecuaciones lineales. Asimismo, justificamos con ejemplos las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales y corregimos errores si hubiera.

Situación A: En familia a la feria gastronómica

La familia Rodríguez Muñoz, que consta de 6 integrantes, asistió a una feria gastronómica y pagó S/105 por el total de entradas. Si los precios eran S/25 por cada adulto y S/10 por cada niño, ¿cuántas entradas de niño compró ese día la familia Rodríguez Muñoz?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

- Identificamos datos de la situación.
  Datos fijos:
  Precio de entrada por adulto: S/25
  Precio de entrada por niño: S/10

  Datos variables:
  Cantidad de adultos: x
  Cantidad de niños: y

- Expresamos las cantidades desconocidas en términos de variables.
  Según la situación, el número de integrantes de la familia Rodríguez Muñoz es 6, lo cual nos permite plantear la siguiente ecuación: $x + y = 6$.
  Asimismo, sabemos que la cantidad de soles que gastó la familia Rodríguez es S/105, lo cual nos permite plantear la ecuación $25x + 10y = 105$.

- Por lo tanto, establecemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 6 & \text{...(I)} \\ 25x + 10y = 105 & \text{...(II)} \end{cases}$$

- Para resolver el sistema por el método de reducción seguimos estos pasos:

  Paso 1: Multiplicamos por (−10) ambos miembros de la ecuación (I).

$$-10x - 10y = -60$$

  Luego, tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -10x - 10y = -60 \\ 25x + 10y = 105 \end{cases}$$

  Paso 2: Resolvemos el sistema de ecuaciones y determinamos la cantidad de entradas de niño:

$$15x = 45 \qquad x + y = 6$$

$$x = \frac{45}{15} \rightarrow x = 3 \qquad 3 + y = 6 \rightarrow y = 3$$

  Por lo tanto, se compraron 3 entradas de niños.

Ahora, respondemos a la siguiente pregunta:

1. Describe el procedimiento seguido en la resolución de la pregunta de la situación

Ten en cuenta

Si multiplicas ambos miembros de una ecuación por una constante diferente de 0, se obtiene una ecuación equivalente (es decir, tiene las mismas soluciones que la ecuación original). Por ejemplo: si multiplicas la ecuación $x + 3y = -4$ por (4), se obtiene $4x + 12y = -16$.

Recuerda

El **conjunto solución** (C. S.) de un sistema es el par de valores (x, y) que satisface simultáneamente a las dos ecuaciones. Por ejemplo, en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 5x + 2y = 22 \end{cases}$$

el conjunto solución es {(2; 6)}. Luego de reemplazar se tiene

$3(2) - 6 = 0 \rightarrow 0 = 0$

$5(2) + 2(6) = 22 \rightarrow 22 = 22$

Como las igualdades son verdaderas, el conjunto solución es correcto.

Situación B: De compras en la tienda de artículos de limpieza

En una tienda de artículos de limpieza, Emilia compra 4 kg de detergente y 2 L de suavizante por un total de S/42. Su amiga Liliana compra 5 kg de detergente y 5 L de suavizante del mismo tipo, por lo cual paga en total S/75. ¿Cuál es el precio en soles del kilogramo de detergente y de cada litro de suavizante?

Fuente: Freepik

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

- Expresamos el precio del detergente y del suavizante con incógnitas.

  Precio por kilogramo del detergente: x

  Precio por litro del suavizante: y

- Organizamos la información en una tabla.

	Detergente (kg)	Suavizante (L)	Precio pagado (S/)
Emilia	4	2	42
Liliana	5	5	75

- Expresamos las cantidades desconocidas.
  "Emilia compra 4 kilogramos de detergente y 2 L de suavizante por un total de S/52".

  $$4x + 2y = 42$$

  "Liliana compra 5 Kg de detergente y 5 L de suavizante del mismo tipo, por lo cual paga en total S/75".

  $$5x + 5y = 75$$

- Por lo tanto, el sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} 4x + 2y = 42 & \text{...(I)} \\ 5x + 5y = 75 & \text{...(II)} \end{cases}$$

Paso 1: Despejamos y en ambas ecuaciones y damos valores a x.

$y = 21 - 2x$ →

x	3	6	9
y	15	9	3

$y = 15 - x$ →

x	3	6	9
y	12	9	6

Recuerda

Para resolver un sistema de ecuaciones, se colocan en columnas los monomios semejantes. Observa:

Coeficientes de la variable y

$$\begin{cases} \boxed{3}x + \boxed{2}y = \boxed{3} \\ \boxed{4}x - \boxed{3}y = \boxed{-13} \end{cases}$$

Coeficientes de la variable x

Términos independientes o constantes del sistema.

Ten en cuenta

El **método de sustitución** en las siguientes ecuaciones:

$4x + 2y = 42$ ...(I)
$5x + 5y = 75$ ...(II)

Despeja y de la ecuación (II):
$y = 15 - x$

Sustituye y en la ecuación (I):

$y = 21 - 2x$
$15 - x = 21 - 2x$
$x = 6$

Sustituye x en la ecuación (II):

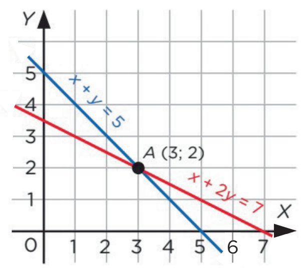
$y = 15 - x$
$y = 15 - 6$
$y = 9$

Por lo tanto, el conjunto solución del sistema de ecuaciones es {(6; 9)}.

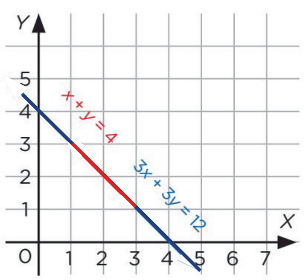
Ten en cuenta

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables o incógnitas, según su número de soluciones, puede ser

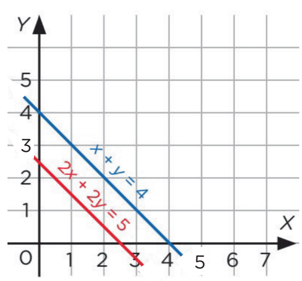
Compatible determinado
Tiene una solución.



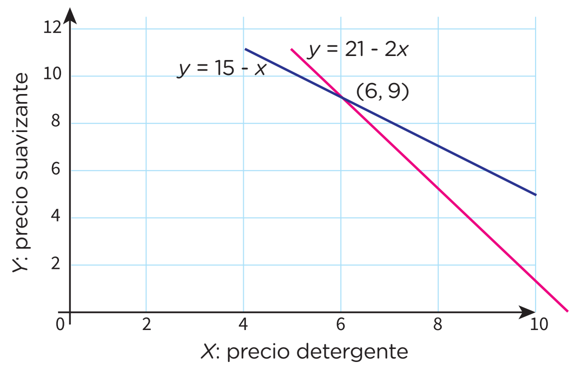
Compatible indeterminado
Tiene infinitas soluciones.



Incompatible
No tiene solución.



Paso 2: Graficamos en el plano cartesiano las rectas.



Luego, en el gráfico observamos que el punto de intersección de las 2 rectas son sus coordenadas (6; 9).

Por lo tanto, x = 6, y = 9

Respuesta: El precio del kilogramo del detergente es S/6 y del litro de suavizante, S/9.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Qué representa el punto de intersección de ambas gráficas?

2. Describe el procedimiento realizado en la resolución de la pregunta de la situación inicial.

3. Desarrolla otro procedimiento que te permita responder la pregunta de la situación inicial.

Aprendemos a partir del error

Situación C: Puesto de frutas

En un puesto de frutas, un vendedor tiene dos variedades de fresas: estándar y de selección. Él vende una caja de fresas estándar a S/35 y una de selección a S/70. En un día, él vendió 32 cajas de fresas y recaudó un total de S/1540. ¿Cuántas cajas de cada tipo vendió?

Fuente: Freepik

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error

Resolución

- Identificamos los siguientes datos:

  Cantidad de cajas de fresas estándar: x
  Cantidad de cajas de fresas de selección: y
  Importe de cajas estándar: $35x$
  Importe de cajas de selección: $70y$

- Expresamos las cantidades desconocidas en términos de variables.

  Vendió en total 32 cajas.
  $x + y = 32$

- Por lo tanto, establecemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 32 & \ldots(\text{I}) \\ 35x + 70y = 1540 & \ldots(\text{II}) \end{cases}$$

- Para resolver el sistema por el método de igualación seguimos estos pasos:

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

Paso 1: Despejamos x en las ecuaciones (I) (II).

De (I): $x = 32 - y$
De (II): $x = (1540 - 70y)/35 = 44 - 2y$

Paso 2: Igualamos las ecuaciones:

$$32 - y = 44 - 2y$$
$$3y = 12$$
$$y = \frac{12}{3}$$
$$y = 4$$

Paso 3: Reemplazamos el valor de $y = 4$ en la ecuación (I).

$$x + y = 32$$
$$x + 4 = 32$$
$$x = 28$$

Respuesta: Él vendió 28 cajas de fresas estándar y 4 cajas de fresas de selección.

Ten en cuenta

Para aplicar **el método de igualación**, resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 & \ldots(\text{I}) \\ x + 3y = 17 & \ldots(\text{II}) \end{cases}$$

Despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

$$x = 2 + 2y$$
$$x = 17 - 3y$$

Iguala las expresiones obtenidas y resuelve.

$$2 + 2y = 17 - 3y$$
$$5y = 15$$
$$y = 3$$

Reemplaza en la ecuación (I) el valor hallado.

$$x - 2(3) = 2 \rightarrow x = 8$$

El conjunto solución es {(8; 3)}.

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito

Establecemos datos y valores desconocidos que incluyen un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Expresé lo que comprendido sobre la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Seleccioné y combiné estrategias y justifiqué sobre las característicvas de la solución de un sistema de ecuaciones.

Ten en cuenta

Para aplicar el método gráfico resuelve el siguiente sistemea de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 & \text{... (I)} \\ x + y = 5 & \text{... (II)} \end{cases}$$

Despeja, en ambas ecuaciones, la variable y, luego, da algunos valores a la variable x para hallar los valores de y.

$$y = \frac{8 - x}{2} ; y = 5 - x$$

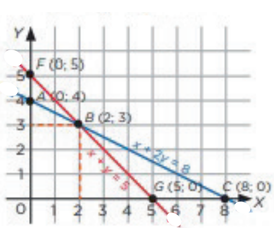
En la ecuación (I):

x	0	8
y	4	0

En la ecuación (II)

x	0	5
y	5	0

Grafica las ecuaciones.



El día que los Rodríguez Muñoz asistieron a una feria gastronómica, consumieron 2 tipos de platos: frejoles con seco y carapulcra con sopa seca. De los 6 integrantes de la familia, 4 comieron frejoles con seco y 2 comieron carapulcra con sopa seca, por lo cual gastaron en total S/140. Además, se sabe que el precio de la carapulcra fue S/4 más que el de los frejoles, y ambos precios fueron cantidades enteras. Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. ¿Cuál de los siguientes sistemas de 2 ecuaciones corresponde a la situación dada?

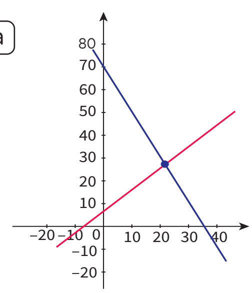
a) $\begin{cases} 4x + 2y = 140 \\ x - y = 4 \end{cases}$

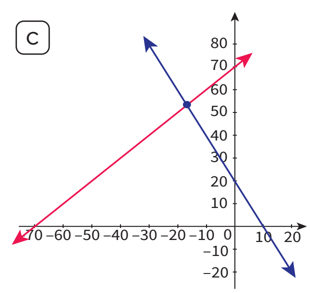
c) $\begin{cases} 4x + 2y = 140 \\ y - x = 4 \end{cases}$

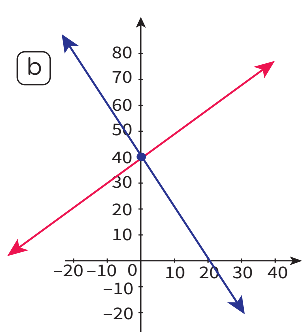
b) $\begin{cases} 4x - 2y = 140 \\ 2x - y = 70 \end{cases}$

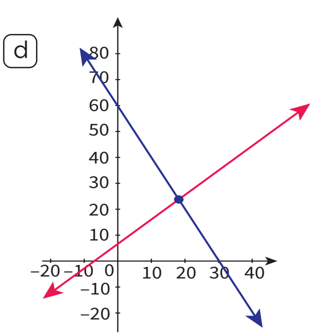
d) $\begin{cases} 4x + 2y = 140 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

2. ¿Cuál de las siguientes representaciones corresponde al conjunto solución correcto de la situación planteada?

a) 

c) 

b) 

d) 

3. Juan pagó S/50 por 3 cajas de tarugos y 5 cajas de clavos. Pedro compró 5 cajas de tarugos y 7 de clavos, por lo que tuvo que pagar S/74. ¿Cuál es el precio de cada caja de tarugos?

a) S/7 b) S/5 c) S/6 d) S/12

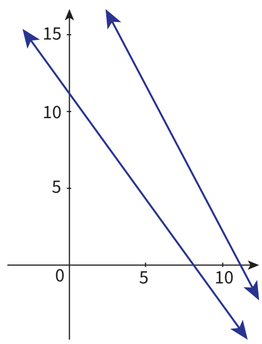
4. Con dos camiones cuyas capacidades de carga son, respectivamente, 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?

5. Ana, la hija menor de la familia Rodríguez Muñoz, decidió crear un problema sobre sistemas de ecuaciones. Para ello, planteó el siguiente sistema:

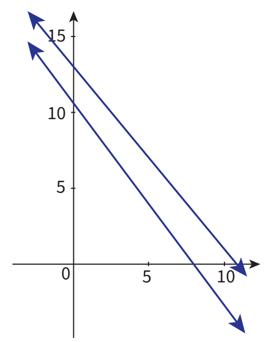
$$\begin{cases} 9x + 6y = 98 \\ 3x + 2y = 24 \end{cases}$$

Justo cuando Ana estaba ideando el contexto de la situación, su hermano mayor, Jorge, vio el sistema y le dijo que revisara los valores de sus ecuaciónes, ya que era necesario que los cambiara. Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

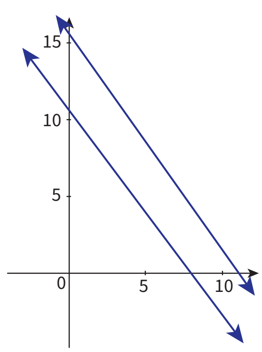
a



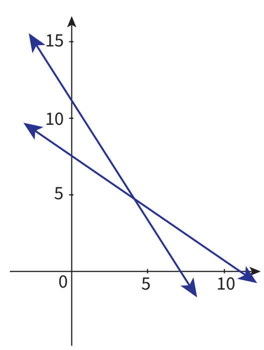
b



c



d



Para corregir el sistema de ecuaciones anterior, Ana reemplanteó de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 9x + 6y = 72 \\ 3x + 2y = 24 \end{cases}$$

Entonces, Jorge volvió a revisar el nuevo sistema y le dijo que aún faltaba cambiar algo, pues el conjunto solución no era el adecuado.
Con la información dada, responde la pregunta 6.

6. ¿Cuál es el conjunto solución que presenta este nuevo planteamiento del sistema de ecuaciones?

Recuerda

Cuando resuelves gráficamente un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, por lo general, hallas el punto de intersección de las dos rectas, lo cual representa el conjunto solución.

Guía para modelar con sistemas de ecuaciones

Paso 1:
Identifica las variables.

Paso 2:
Expresa todas las cantidades desconocidas en términos de variables.

Paso 3:
Establece un sistema de ecuaciones.

Paso 4:
Resuelve el sistema e interpreta los resultados.

7. Con el viento a favor en vuelo, un avión pequeño puede recorrer 1200 km en 3 horas. Con el viento en contra, el avión puede recorrer la misma distancia en 5 horas. Calcula la velocidad del avión y la velocidad del viento.

a) avión: 320 km/h; viento: 80 km/h
b) avión: 640 km/h; viento: 560 km/h
c) avión: 321 km/h; viento: 81 km/h
d) avión: 200 km/h; viento: 50 km/h

8. Una persona invierte en un producto una cantidad de dinero y obtiene un 5 % de beneficio. Por otra inversión en un segundo producto, logra un beneficio del 3,5 %. Si en total invirtió S/10 000 y los beneficios de la primera inversión superan en S/300 a los de la segunda, ¿cuánto dinero invirtió en cada producto?

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Relacioné datos y valores desconocidos, y los representé mediante dos ecuaciones lineales.			
Expresé lo que comprendo sobre la solución de un sistema de ecuaciones lineales.			
Elegí un método para resolver un sistema de ecuaciones lineales.			
Seleccioné y combiné estrategias y un método para solucionar un sistema de ecuaciones lineales.			
Justifiqué sobre las características de la solución de un sistema de ecuaciones lineales empleando propiedades o ejemplos.			

¿Cómo potenciamos nuestra creatividad empleando transformaciones geométricas?

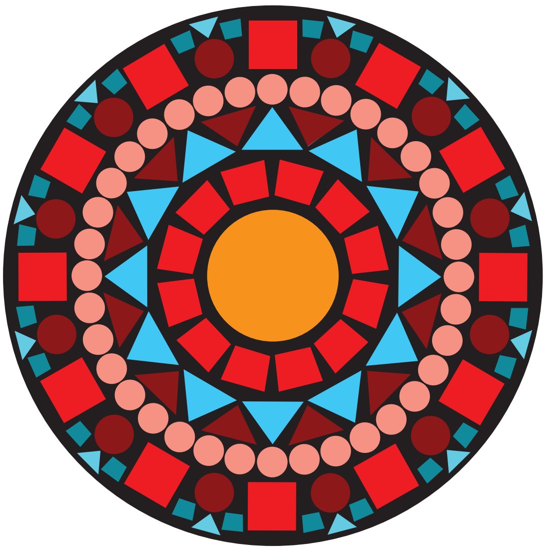
Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Describimos los movimientos de un objeto real o imaginario, así como las transformaciones de objetos o formas geométricas mediante la combinación de traslaciones, rotaciones y simetrías. Además, empleamos estrategias o procedimientos para describir las traslaciones y rotaciones.

Mandalas para pensar creativamente

La profesora Carmen de la institución educativa Daniel Alcides Carrión de Chancay promueve la elaboración de mandalas para potenciar la creatividad de los estudiantes. Por ello, organiza el concurso Mandalas Andinos 2024. Adriana es una estudiante de 4.º grado de secundaria que quiere ganar el concurso junto con sus compañeros; por ello, Jorge, que está en el mismo grupo, les presenta el siguiente mandala:



Jorge indica que, antes de realizar un modelo de mandala es importante reconocer qué movimientos puede tener este; si no, perderán el concurso. Entonces, deciden investigar un mandala relacionado con la cultura de su región y lo presentan en el concurso.

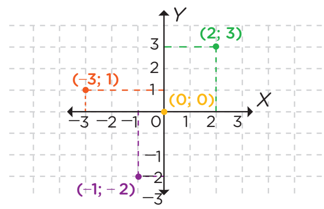
a. Ayuda al grupo de Adriana y Jorge a reconocer cuáles son los movimientos que se han generado en el mandala mostrado.

b. Plantea y dibuja un mandala andino que pueda participar en el concurso.

Ten en cuenta

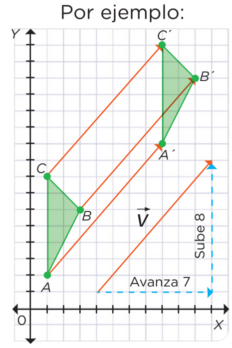
Los **pares ordenados** son pares de números utilizados para ubicar un punto en el plano cartesiano, y se escriben en la forma (x; y), donde x es la abscisa y y es la ordenada. Por ejemplo, en el plano cartesiano representa los siguientes puntos:

(2; 3), (–3; 1), (0; 0) y (–1; –2)



Recuerda

En una **traslación** $T_{\vec{v}}$, la longitud de los lados, los ángulos y la orientación de la figura no varía. Por ejemplo:



El vector $\vec{v}$ (7; 8) indica que el triángulo ABC se movió 7 cuadrados a la derecha y 8 cuadrados hacia arriba.

Comprendemos el problema

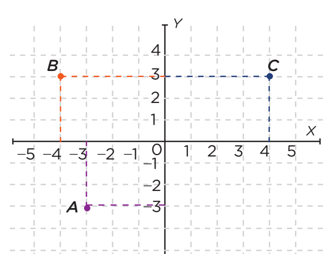
1. ¿Qué figuras geométricas observas en la configuración del mandala presentado por Jorge? Dibuja.

2. ¿Cómo están organizadas las figuras geométricas en el mandala presentado por Jorge? Dibuja una secuencia (según el tamaño, la forma, etc.).

3. ¿Qué te pide la situación?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

2. ¿Cuál de las alternativas corresponde a las coordenadas de los puntos ubicados en el plano cartesiano?

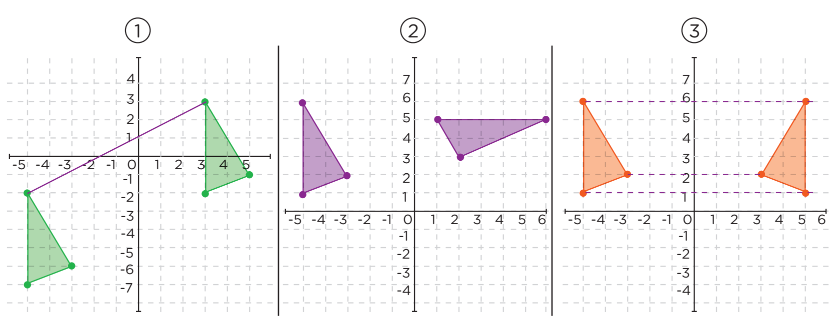


(a) A (–3; –3), B (–4; 3), C (4; 3)

(b) A (3; 3), B (–4; 3), C (4; 3)

(c) A (–3; –3), B (–4; 3), C (–4; –3)

5. Observa las siguientes transformaciones geométricas.



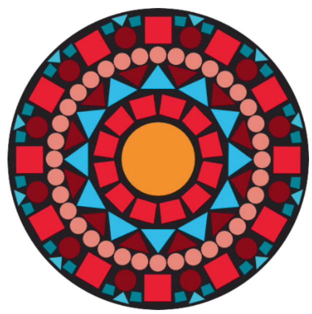
Relaciona y marca la alternativa adecuada, según corresponda.

I. rotación II. simetría axial III. traslación

(a) 1-III, 2-II, 3-I (b) 1-II, 2-I, 3-III (c) 1-III, 2-I, 3-II

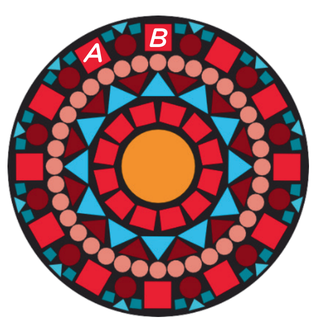
Ejecutamos la estrategia o plan

6. Traza dos ejes de simetría en este mandala:



7. ¿Qué transformaciones geométricas se han desarrollado? Explica tu respuesta.

8. ¿Qué transformación geométrica se realiza en la figura *A* para obtener la figura *B*? ¿Cuál es el ángulo de giro?



9. Dibuja un mandala andino que puedan presentar Adriana y Jorge en el concurso (puedes emplear tu cuaderno, una hoja A3, papelote, PPT, GeoGebra, etc.).

Reflexionamos sobre el desarrollo

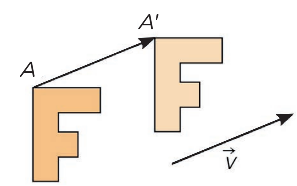
10. ¿Por qué fue importante trazar el eje de simetría en el mandala? Justifica tu respuesta.

11. ¿Qué otras transformaciones puedes observar en el mandala propuesto por Jorge? Describe tu respuesta.

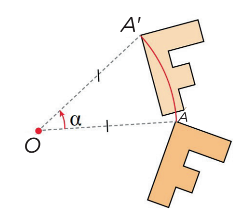
Recuerda

Una **transformación geométrica** es una operación geométrica que permite crear una nueva figura, llamada homóloga, a partir de una figura dada, llamada original. Entre las transformaciones geométricas, tenemos las siguientes:

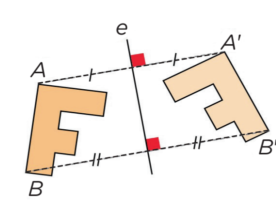
Traslación ($T_{\vec{v}}$)



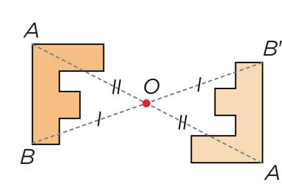
Rotación



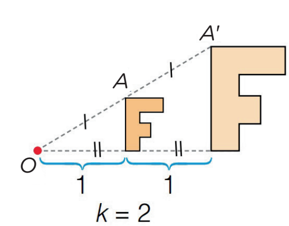
Simetría axial



Simetría central



Homotecia



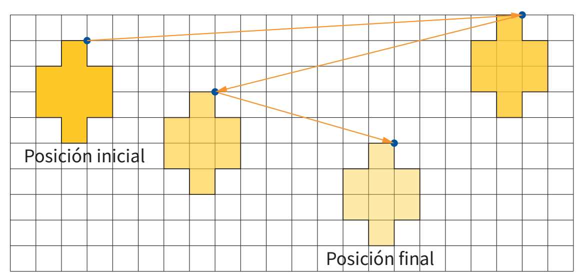
Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

Expresamos, con dibujos, material concreto y lenguaje geométrico, la comprensión sobre las transformaciones geométricas de una figura. Asimismo, comprobamos con ejemplos y con propiedades geométricas las afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que se descubren.

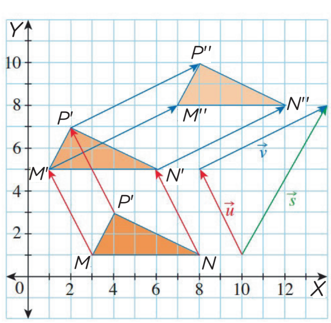
Situación A: Cambiando de posición al logo del colegio

Una institución educativa, en la ciudad de Huanta, ha cambiado la posición de su logo durante los cuatro últimos años, tal como se muestra en la imagen. Describe la transformación de la figura inicial para llegar a la figura final.



Ten en cuenta

Una **composición de traslaciones** es la aplicación sucesiva de dos o más traslaciones. Por ejemplo, traslada el triángulo *MNP* según $\vec{u}(-2; 4)$ y luego traslada la figura obtenida según $\vec{v}(6; 3)$.



En lugar de realizar las dos traslaciones anteriores, puedes obtener el mismo $\Delta M''N''P''$ aplicando la traslación de acuerdo con el vector suma $\vec{s}$:

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$$
$$\vec{s} = (-2; 4) + (6; 3)$$
$$\vec{s} = (-2 + 6; 4 + 3)$$
$$\vec{s} = (4; 7)$$

Analizamos los procedimientos planteados en la resolución.

Resolución

Siguiendo la trayectoria de las flechas, la primera transformación es el resultado de la traslación de $\vec{v}(17; 1)$; la segunda, el resultado de la traslación de $\vec{u}(-12; -3)$, y la tercera, el resultado de la traslación de $\vec{p}(7; -2)$.

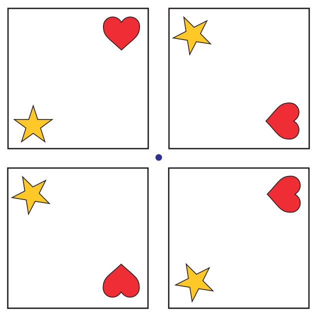
Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Qué significan $\vec{v}(17; 1)$, $\vec{u}(-12; -3)$ y $\vec{p}(7; -2)$ en la traslación de la figura?

2. Describe las características de la forma geométrica al realizar una traslación.

Situación B: El diseño de Juan Carlos

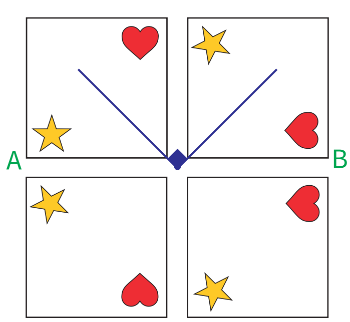
Por el Día de San Valentín, Juan Carlos elaboró el siguiente diseño:

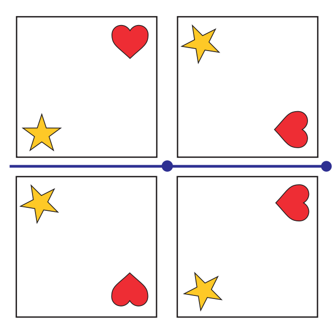


¿Qué transformaciones geométricas puedes observar?

Resolución

- La figura de la posición A gira 90° en sentido horario y forma la figura de la posición B.
- Si trazamos un eje horizontal por el centro, este representará el eje de simetría axial.





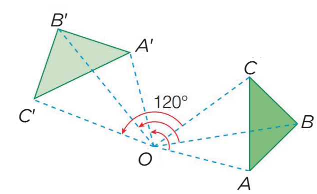
Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. Describe el procedimiento realizado en la resolución de la situación.

2. ¿A qué transformación geométrica es equivalente la rotación de 180°?

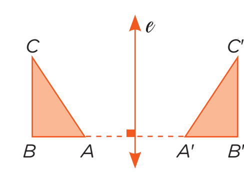
Ten en cuenta

En toda **rotación** o **giro** hay que indicar el punto alrededor del cual se gira (centro de giro) y el ángulo de giro. Además, las rotaciones conservan el tamaño y la forma, pero no la orientación de la figura.



El triángulo ABC gira 120° en sentido antihorario respecto al punto O: $R(O; 120°)$.

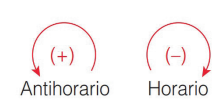
Una **simetría axial** conserva el tamaño y la forma, pero no la orientación de la figura.



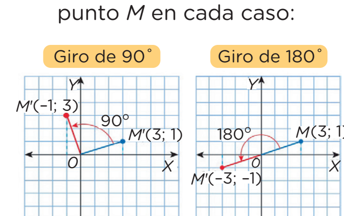
El triángulo ABC es simétrico al triángulo $A'B'C'$ respecto al eje de simetría e.

¿Sabías que...?

Hay dos **tipos de giro**



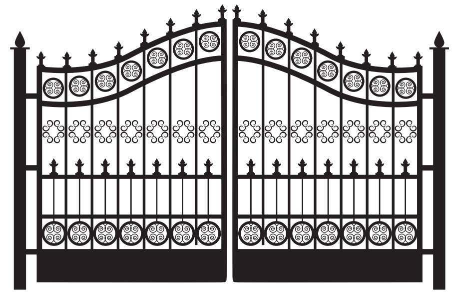
Observa cómo gira el punto M en cada caso:



Aprendemos a partir del error

Situación C: Transformación geométrica en el adorno de una puerta

El Cementerio Museo General Presbítero Matías Maestro es un monumento histórico ubicado en Barrios Altos, Lima, Perú. Se inauguró el 31 de mayo de 1808, además, fue el primer panteón de la ciudad, ya que anteriormente los entierros se realizaban en las iglesias. Más que un camposanto, el Presbítero Maestro es considerado un testimonio viviente del pasado y presente de la República peruana.

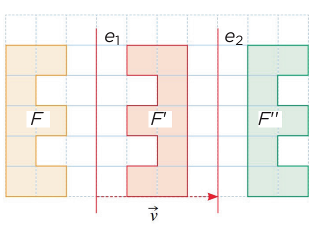


Una de las puertas de reja del cementerio tiene adornos como se muestran en la imagen.

Describe sus transformaciones geométricas.

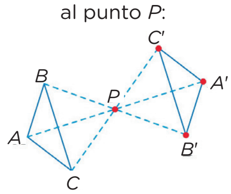
Ten en cuenta

La **composición de una simetría** de eje e_1 con otra de eje e_2, paralelo al anterior, es una traslación de vector $2\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es el vector perpendicular que une los dos ejes e_1 y e_2 en ese sentido.



Recuerda

En una **simetría central**, el triángulo ABC es simétrico al triángulo $A'B'C'$ respecto al punto P:



Con ello puedes comprobar lo siguiente:

- P es el punto medio de los segmentos AA', BB' y CC'.
- Una simetría central cambia el sentido de una figura.
- La simetría central corresponde a una rotación de 180°.

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error

Resolución

- La puerta se abre por el centro, lo cual nos da la idea del eje de simetría.
- Además, todos los adornos son simétricos.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. ¿Qué características tiene una simetría central? Explica tu respuesta.

2. ¿Qué características tiene una traslación? Explica tu respuesta.

3. ¿Qué características tiene una rotación? Explica tu respuesta.

4. De acuerdo con las características sobre simetría, traslación y rotación, ¿existe rotación en los adornos? Explica tu respuesta.

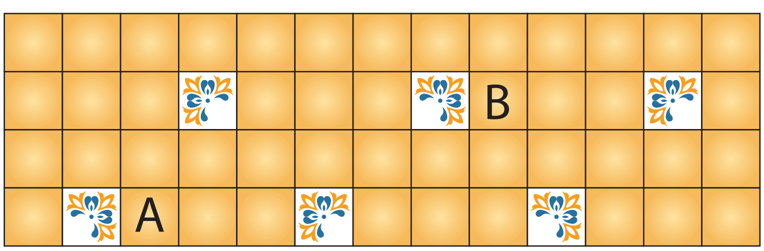
Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito

Describimos movimientos y las transformaciones de objetos reales que generan teselas en un plano. Además, empleamos estrategias para describir las transformaciones mediante la combinación de traslaciones y rotaciones. Planteamos afirmaciones sobre las relaciones y propiedades entre los objetos y las formas geométricas

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Braulio está poniendo mayólicas a la pared del baño de su casa. En la imagen se muestra el diseño que realizó con las mayólicas. ¿Qué transformación geométrica aplicó a la mayólica de la posición A para lograr la posición B? Justifica tu respuesta.



(a) traslación
(b) rotación
(c) simetría axial
(d) simetría central

2. Marina desea cambiar las rejas de su puerta, y se dirige a la carpintería metálica. Ella le menciona al encargado que quiere sus rejas con diseños basados en simetrías, rotaciones y traslaciones. El encargado le muestra los siguientes diseños. ¿Cuál crees que elegirá Marina? Explica tu respuesta.

Diseño 1 | Diseño 2 | Diseño 3 | Diseño 4 | Diseño 5 | Diseño 6

Ten en cuenta

Las transformaciones se pueden componer; es decir, a una figura transformada se le puede aplicar otra transformación.

Observa las **simetrías axiales** sucesivas.

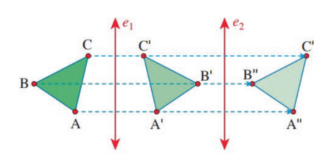


Figura 1

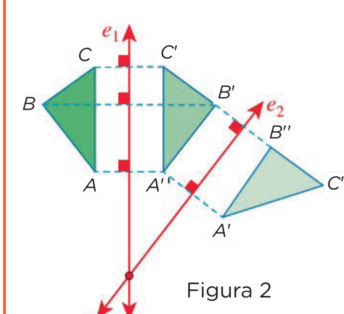
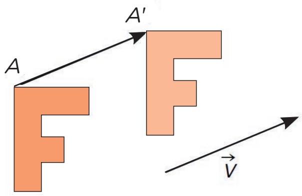


Figura 2

Ten en cuenta

En la traslación, el vector $\vec{v}(x; y)$ indica el desplazamiento de la figura.



Una chompa para Mateo

Se acerca el cumpleaños de Mateo, y su mamá le regalará una linda chompa que ella misma tejerá. Como a Mateo le gusta la matemática, su mamá hará el tejido con un diseño.

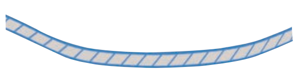
Observa el avance del tejido.

3. ¿Cuál de las franjas continuará en el tejido?

a 

c 

b 

d 

4. ¿Cuál de las franjas se encontraría cuatro franjas más arriba?

a 

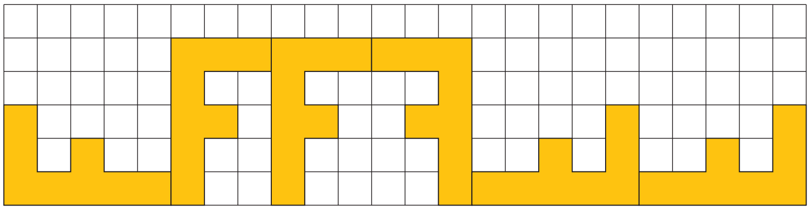
c 

b 

d 

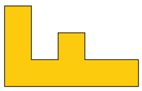
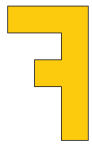
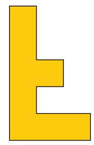
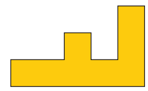
La letra "F"

Observa qué transformaciones geométricas se aplicaron para formar las diferentes posiciones de la letra "F".
Con la información dada, responde la pregunta 5.



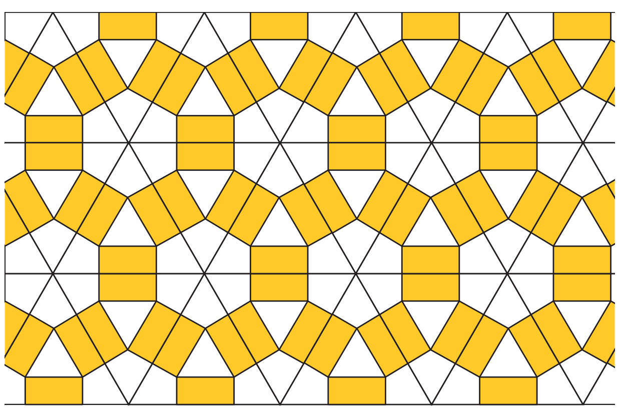
1 2 3 4 5 6

5. ¿Qué figura de la letra “F” ocupará la séptima posición? Describe la transformación geométrica que la generó.

a  b  c  d 

El mosaico

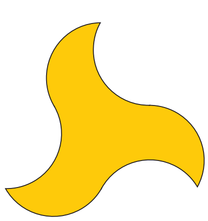
Un mosaico es un recubrimiento de todo el plano mediante figuras planas, llamadas **teselas**, que no se solapan ni dejan hueco entre ellas. La idea de mosaico viene asociada a la decoración hecha con piezas. Todas las culturas han utilizado traslaciones, giros y simetrías en sus manifestaciones artísticas. Con sorprendentes resultados estéticos, han jugado casi siempre con los movimientos del plano.
Con la información dada, responde la pregunta 6.



6. ¿Cuál de las siguientes figuras podría por sí sola ser una tesela para formar un mosaico?, ¿por qué?

a hexágono
b dodecaedro
c triángulo escaleno
d pentágono regular

7. ¿Qué transformación se aplicó en el triángulo equilátero para obtener este polígono nazarí?

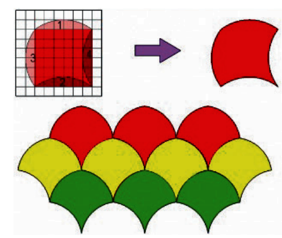


a rotación de un arco
b traslación de un arco
c rotación de una semicircunferencia
d traslación de una semicircunferencia

Realiza los trazos y muestra los movimientos necesarios que debes efectuar para lograrlo.

Ten en cuenta

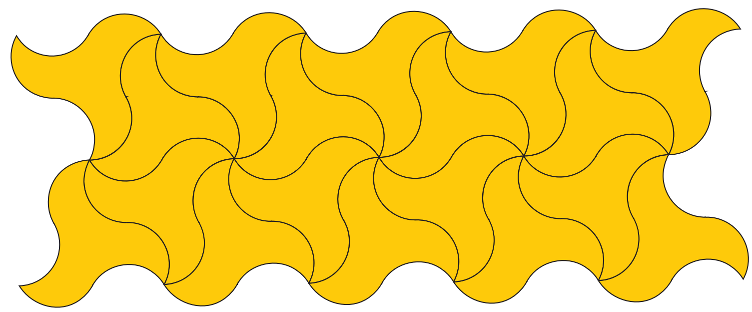
Un **teselado** es un patrón repetitivo de figuras geométricas, como los polígonos que encajan y cubren el plano sin superponerse y sin dejar huecos. Por ejemplo:



Ten en cuenta

Se llama **mosaico** a todo recubrimiento del plano mediante piezas, llamadas teselas, que no pueden superponerse ni pueden dejar huecos sin recubrir, y en el que los ángulos que concurren en un vértice deben sumar 360°. Existen muchas formas de obtener un mosaico.

8. Observa el mosaico formado por la tesela la pajarita. Describe el movimiento que se aplicó a la tesela para formar el mosaico.



Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Describí un objeto en términos de una traslación y una rotación.			
Expresé con dibujos y material concreto reutilizable las transformaciones geométricas como la reflexión.			
Empleé diversas estrategias para describir las transformaciones de traslación y rotación.			
Elaboré mi propio mandala e identifiqué sus transformaciones geométricas.			

¿Cómo tomamos decisiones a partir del resultado de la probabilidad?

Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Determinamos las condiciones y restricciones de una situación aleatoria, analizamos la ocurrencia de sucesos independientes y dependientes, y representamos su probabilidad mediante el valor racional de 0 a 1. Seleccionamos y empleamos procedimientos para determinar la probabilidad.

Tomamos decisiones

Enrique sabe preparar algunas recetas ricas y nutritivas para la alimentación de su familia. Sin embargo, no quiere destinar tiempo a decidir cada día lo que va a cocinar. Por ello, elige sus menús al azar: en una caja coloca 4 papelitos con los nombres de las entradas y, en otra caja, 7 papelitos con los nombres de los segundos (ver tabla).

Un día cualquiera, Enrique coge 1 papelito de cada caja y así tiene la combinación entrada-segundo que va a preparar ese día.

Para el caso de las entradas, coge 1 papelito y lo vuelve a introducir nuevamente en la caja, dado que solo dispone de 4. En el caso de los segundos, como tiene 1 para cada día de la semana, no devuelve el papelito a la caja después de extraerlo durante esa semana.

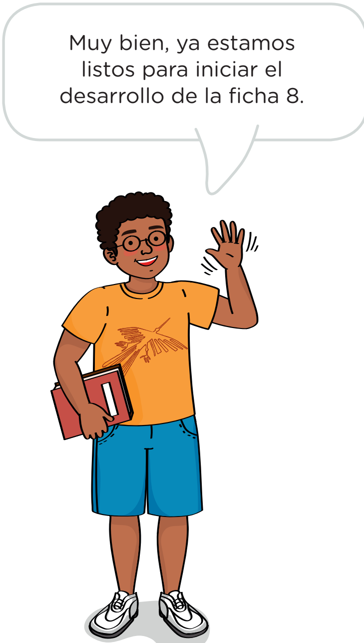
Entradas	Segundos
Huevo a la rusa	Cau cau
Sopa de sémola	Estofado de pollo
Aguadito	Ají de gallina
Ceviche	Locro
	Lentejas
	Picante de res
	Adobo de cerdo

Respecto a la información anterior, responde las siguientes preguntas:

a. Si Enrique preparó aguadito el primer día, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo día prepare ceviche como entrada?

b. Si Enrique preparó ají de gallina el primer día, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo día prepare lentejas como segundo?

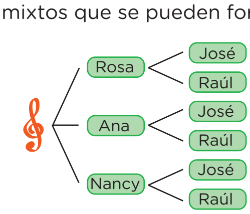
c. Si ayer, que fue el primer día, Enrique preparó aguadito con ají de gallina, ¿cuál es la probabilidad de que hoy prepare ceviche de entrada y lentejas de segundo?



Recuerda

El **principio multiplicativo** consiste en que, si un evento *A* puede ocurrir de *m* formas distintas y un evento *B* puede ocurrir de *n* formas diferentes, entonces el número de formas en las que pueden ocurrir *A* y *B* es igual a $m \times n$.

El **diagrama del árbol** es una estrategia que se utiliza para hallar el espacio muestral en un experimento aleatorio. Por ejemplo: un productor de cumbia quiere armar un dúo mixto (varón y mujer). Si él puede elegir entre 3 cantantes mujeres (Rosa, Ana y Nancy) y 2 cantantes varones (José y Raúl), observa el diagrama del árbol con los dúos mixtos que se pueden formar.



Comprendemos el problema

1. ¿Cuáles son las entradas que puede preparar Enrique?

2. ¿Qué platos puede preparar Enrique como segundo?

3. ¿Cómo decide Enrique qué entrada y segundo preparar cada día de la semana?

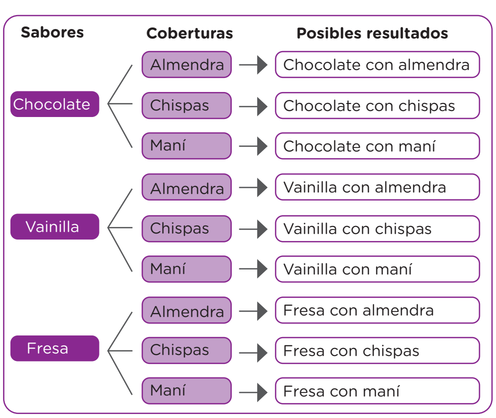
4. ¿Qué te piden las preguntas de la situación inicial?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

5. Lee y analiza la siguiente situación:
   Óscar Miguel desea comprar un helado en Sabores Illimanos, donde ofrecen lo siguiente: helados de chocolate, vainilla y fresa, con cobertura de almendra, cobertura de chispas de chocolate y de maní. ¿Cuántas posibilidades diferentes de helados tiene para combinar Óscar Miguel?

Resolución

Una forma de hallar las opciones posibles de helados o espacio muestral es mediante un diagrama del árbol. Observa la siguiente imagen:



En el diagrama del árbol se observa que existen 9 opciones, es decir, $n(\Omega) = 9$. Una manera más fácil de calcular las opciones de Óscar Miguel es aplicando el principio multiplicativo, es decir, multiplicar la cantidad de sabores por la cantidad de coberturas:

Sabores		Coberturas	
3	×	3	= 9 opciones

6. Cinco estudiantes de 4.° grado de secundaria jugaron a mencionar algunos sucesos que pueden ocurrir al lanzar un dado. Gana quien dice el suceso con mayor probabilidad de ocurrir. ¿Quién ganó?

Resolución

Para averiguar quién ganó el juego, debes completar la tabla y responder las interrogantes.

a. Completa la tabla con los datos que faltan.

Amigos	Espacio muestral "lanzar un dado"	Número de casos posibles	Suceso o evento	Resultados favorables	
Óscar			*A*: obtener un número par	$A = \{2; 4; 6\}$	$n(A) = 3$
Miluzka			*B*: obtener un número mayor que 2	$B = \{3; 4; 5; 6\}$	$n(B) = 4$
Fabián	$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$	$n(\Omega) = 6$	*C*: obtener un número múltiplo de 3	$C = \{3; 6\}$	$n(C) =$ ____
Julisa			*D*: obtener un número múltiplo de 5	$D =$ ________	$n(D) =$ ____
Willy			*E*: obtener un número primo	$E =$ ________	$n(E) =$ ____

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado se obtenga un número par?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado se obtenga un número mayor que 2?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado se obtenga un múltiplo de 3?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado se obtenga un múltiplo de 5?

Ten en cuenta

Un **experimento aleatorio** (ε) es aquella acción realizada al azar en la cual no se puede predecir o anticipar el resultado, pero sí se conocen todos los posibles resultados.
Por ejemplo:
ε_1: lanzar un dado
(no se conoce el número que saldrá)

El **espacio muestral** (Ω) es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Por ejemplo, para el ε_1: lanzar un dado, su espacio muestral es
$\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \rightarrow n(\Omega_1) = 6$

Un **evento** o **suceso** (*A*) es un subconjunto del espacio muestral.
Por ejemplo: para el espacio muestral Ω_1 *A*: obtener un número primo.

$A = \{2; 3; 5\} \rightarrow n(A) = 3$

Para encontrar la **probabilidad** de que ocurra un suceso, halla el cociente entre el número de casos favorables $n(A)$ y el número total de casos posibles $n(\Omega)$ es decir:

$$P(A) = \frac{\text{N.° de casos favorables de } A}{\text{N.° de casos posibles}}$$

Por ejemplo, luego de lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 4? Analiza el proceso de solución.

Suceso *A*: salir un número mayor que 4

Número de casos favorables:
$A = \{5; 6\} \rightarrow n(A) = 2$

Número de casos posibles:
$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \rightarrow n(\Omega) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ten en cuenta

La **probabilidad** significa la posibilidad de que un evento ocurra dentro de las posibles opciones de ocurrencia. Asimismo, existen tres formas de expresar la probabilidad. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado salga un número par?

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \rightarrow n(\Omega) = 6$

Suceso A: sale par
$A = \{2; 4; 6\} \rightarrow n(A) = 3$

Luego:

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ← Como fracción

$P(A) = 0{,}50$ ← Como decimal

$P(A) = 0{,}50 \times 100\ \% = 50\ \%$
Como porcentaje

Por lo tanto, la probabilidad de que salga un número par es del 50 %.

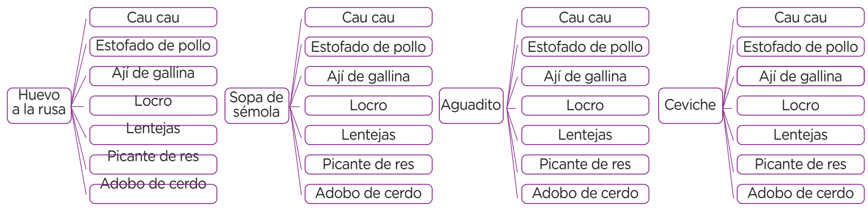
El **diagrama del árbol** muestra todas las posibilidades de que ocurra un evento dado.

Recuerda

La notación matemática de un suceso o evento suele ser A, y el número de elementos del evento se denota por $n(A)$.

Ejecutamos la estrategia o plan

7. Aplica la estrategia del diagrama del árbol para saber cuántas combinaciones de entrada y segundo puede preparar Enrique.



8. Si Enrique preparó aguadito el primer día, completa la tabla para determinar la probabilidad de que el segundo día prepare ceviche como entrada.

Espacio muestral "entradas"	Número de casos posibles	Suceso o evento	Resultados favorables		Probabilidad
Huevo a la rusa Sopa de sémola Aguadito Ceviche	$n(\Omega)$ = ____	A: sacar *ceviche*	A = {*ceviche*}	$n(A)$ = ____	$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ = ____

9. Si Enrique preparó ají de gallina el primer día, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo día prepare lentejas como plato de segundo?

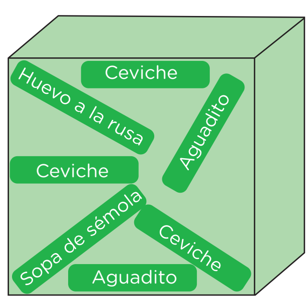
Espacio muestral "entradas"	Número de casos posibles	Suceso o evento	Resultados favorables		Probabilidad
Cau cau Estofado de pollo Locro Lentejas Picante de res Adobo de cerdo	$n(\Omega)$ = ____	B: sacar *lentejas*	B = {lentejas}	$n(B)$ = ____	$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}$ = ____

10. Según las respuestas a las preguntas 8 y 9 de esta sección, responde la tercera pregunta de la situación inicial.

Reflexionamos sobre el desarrollo

11. ¿Tendrás otra forma de resolver las preguntas **a** y **b** de la situación inicial? Explica tu respuesta.

12. Para una nueva semana, Enrique decide completar la cantidad de entradas. Por ello, escribe en dos papelitos más la palabra *ceviche* y en uno más la palabra *aguadito*. ¿Qué es más probable que prepare el primer día de la semana, huevo a la rusa o ceviche? Justifica tu respuesta.



Ten en cuenta

El **espacio muestral** de todos los posibles resultados del experimento aleatorio "Mariana lanza un dado y una moneda a la vez" es Ω = {1C, 1S, 2C, 2S, 3C, 3S, 4C, 4S, 5C, 5S, 6C, 6S}.

$n(\Omega) = 12$

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

Expresamos con diversas representaciones el significado del valor de la probabilidad para caracterizar la ocurrencia de diversos sucesos de una situación aleatoria. Asimismo, justificamos con ejemplos y con nuestros conocimientos sobre probabilidades, y corregimos errores si los hubiera.

Ten en cuenta

Si A y B son **eventos independientes**, la probabilidad de que A y B ocurran simultaneámente es $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Por ejemplo, si lanzas simultáneamente una moneda y un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara y número par?

Observa la tabla:

Número de casos posibles al lanzar una moneda	Suceso A: salir cara
$\Omega = \{S, C\}$ $n(\Omega) = 2$	$A = \{C\}$ $n(A) = 1$

La probabilidad de obtener cara es

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

Número de casos posibles al lanzar un dado	Suceso B: salir número par
$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $n(\Omega) = 6$	$B = \{2; 4; 6\}$ $n(B) = 3$

Y la probabilidad de obtener número par es

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la probabilidad es

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Situación A: Lanzamiento de monedas

Dado el experimento que consiste en lanzar una moneda 3 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara-sello-sello (CSS)?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

El lanzamiento de una moneda varias veces corresponde a sucesos independientes.
Los sucesos son independientes cuando la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro. Entonces:otro. Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- Suceso A: salir cara en el primer lanzamiento
  N.° de casos favorables A: 1
  N.° de casos posibles: 2 $\quad P(A) = \frac{1}{2}$
- Suceso B: salir sello en el segundo lanzamiento
  N.° de casos favorables B: 1
  N.° de casos posibles: 2 $\quad P(B) = \frac{1}{2}$
- Suceso C: salir sello en el tercer lanzamiento
  N.° de casos favorables C: 1
  N.° de casos posibles: 2 $\quad P(C) = \frac{1}{2}$

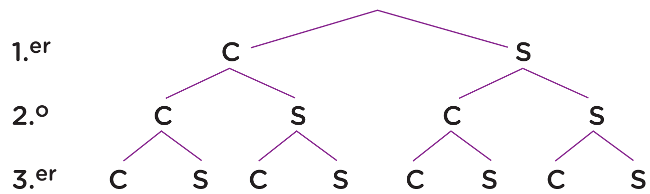
Luego de aplicar la fórmula, la probabilidad de obtener cara-sello-sello (CSS) es

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$$

Respuesta: La probabilidad de obtener CSS es $\frac{1}{8}$.

Otra forma de hallar este resultado es elaborando un diagrama del árbol, tal como se muestra a continuación.



El espacio muestral es el siguiente:

Ω = {CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS}

- Suceso A: obtener CSS
  N.° de casos favorables A: 1
  N.° de casos posibles: 8

  $P(A) = \frac{1}{8}$

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

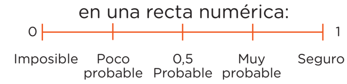
1. ¿Cuál es el significado de la respuesta $\frac{1}{8}$ en la situación? Describe con tus propias palabras.

2. ¿Cuál de los dos procedimientos presentados te parece más práctico?, ¿por qué?

3. Dado el mismo experimento, ¿qué es más probable, obtener dos caras o tres caras? Explica por qué.

Ten en cuenta

Los resultados de la probabilidad también se pueden representar en una recta numérica:



Por ejemplo, si lanzas un dado una sola vez, determina si cada suceso resulta seguro, imposible o probable.

Suceso A:
salir un número par

A = {2; 4; 6}

Suceso B:
salir un número compuesto mayor que 4

B = {6}

Suceso C:
salir un número primo mayor que 5

C = { }

Suceso D:
salir un número menor que 10

D = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

Luego, tienes los siguientes resultados:

- $P(A) = \frac{3}{6}$

  $P(A)$ = 0,5 = 50 %; entonces, es probable.
- $P(B) = \frac{1}{6}$

  $P(B)$ = 0,166... = 16,666...%; entonces, es poco probable.
- $P(C) = \frac{0}{6} = 0$; entonces, es un suceso imposible.
- $P(D) = \frac{6}{6} = 1$

  $P(D)$ = 100 %; significa que es un suceso seguro.

Ten en cuenta

Si A y B son **eventos dependientes**, la probabilidad de ocurrencia consecutiva de A y B es igual a la probabilidad de que suceda A por la probabilidad de que suceda B (una vez ocurrida A).

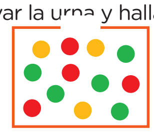
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$

Por ejemplo, una urna tiene 12 esferas, de las cuales 5 son de color verde, 4 de color rojo y 3 de color amarillo. ¿Cuál es la probabilidad de que se saquen 2 esferas rojas sin reposición?

Observa el proceso de solución.

Suceso A:
obtener una esfera roja

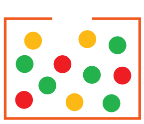
Para hallar la probabilidad de obtener una esfera roja en la primera extracción, debes observar la urna y hallar $P(A)$:



Suceso (A): obtener una esfera roja

→ $P(A) = \frac{4}{12}$

Luego, para hallar la probabilidad de obtener una esfera roja en la segunda extracción, debes observar la urna, sin reposición, y hallar la



Suceso (B/A): obtener una esfera roja, ya que en la primera extracción salió roja.
Luego, tenemos que:

→ $P(B/A) = \frac{3}{11}$

Por lo tanto, la probabilidad de que ambas esferas sean de color rojo es

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$

$P(A \cap B) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{11}$

Situación B: Extracción de tarjetas de una caja

En la caja se tienen 9 tarjetas de color amarillo y 7 tarjetas de color rojo. Carlos, que es árbitro de fútbol, extrae de la caja 2 tarjetas sin reposición, una por una. ¿Cuál es la probabilidad de que las 2 tarjetas sean de color rojo?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

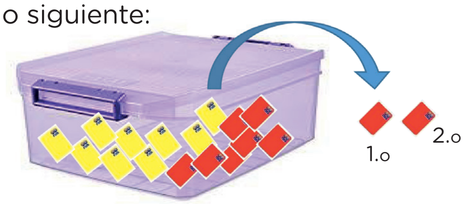
Resolución

Al extraer las tarjetas una por una, se entiende que se da en forma sucesiva y sin reposición, por lo que se trata de una probabilidad de sucesos dependientes.

Dos sucesos son dependientes cuando el resultado del primero influye en la probabilidad del segundo. Se calcula multiplicando la probabilidad del primer suceso por la probabilidad del segundo suceso, habiendo ocurrido el primero.

$P(A \cap B) = P(A) \times P\left(B/A\right)$

Del enunciado se tiene lo siguiente:



- Suceso A: se obtiene una tarjeta roja en la primera extracción
  N.° de casos favorables: 7
  N.° de casos posibles: 16

  $P(A) = \frac{7}{16}$

- Suceso B/A: la siguiente tarjeta es roja, ya que en la primera extracción salió roja

  N.° de casos favorables B/A: 6

  N.° de casos posibles: 15

  $P(B/A) = \frac{6}{15}$ → sin reposición

  Por lo tanto, la probabilidad de que ambas tarjetas sean de color rojo es la siguiente:

  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = \frac{7}{16} \times \frac{6}{15} = \frac{7}{40}$

  Respuesta: La probabilidad de que las dos tarjetas sean de color rojo es $\frac{7}{40}$.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Qué significa que la respuesta sea $\frac{7}{40}$ en la situación? Describe con tus propias palabras.

2. Considerando la misma cantidad de tarjetas en la caja, en otro momento Carlos extrae 2 tarjetas con reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean de color rojo? Justifica tu respuesta.

3. Si se extraen 2 tarjetas de color rojo, ¿qué es más probable que ocurra, la extracción con reposición o la extracción sin reposición?

Recuerda

Los sucesos independientes son aquellos en los que el resultado del primer suceso o evento no influye en la probabilidad del segundo. La **probabilidad de sucesos independientes** se calcula multiplicando sus probabilidades individuales.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

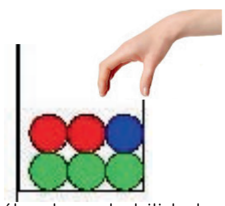
Por ejemplo, determina la probabilidad de que al lanzar dos dados en forma sucesiva salgan números pares.

A: primer suceso par
B: segundo suceso par

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Recuerda

El siguiente es un ejemplo de **probabilidad con reposición**. En una urna hay 2 bolillas rojas, 3 bolillas verdes y 1 bolilla azul. Luego, se extraen 3 bolillas, una a la vez, con reposición.



¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una bolilla roja, una verde y una roja (en ese orden)?Analiza el proceso de solución.

Tienes estos sucesos:
R: sacar una bolilla roja

$\longrightarrow P(R) = \frac{2}{6}$

V: sacar una bolilla verde

$\longrightarrow P(V) = \frac{3}{6}$

Luego, tienes los siguiente:

$P(RVR) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$

Por lo tanto, la probabilidad es $\frac{1}{18}$.

Aprendemos a partir del error

Situación C: ¿Qué color de bolilla saldrá?

En una urna hay 3 bolillas blancas y 2 bolillas negras. Luego, se extraen al azar 3 bolillas, una a la vez, con reposición.

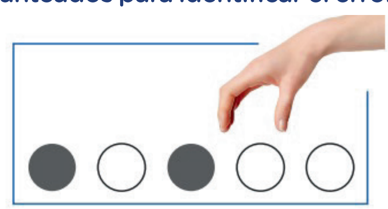
a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener solo bolillas negras en las 3 extracciones?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan bolillas de color blanco, negro y blanco?

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

Podemos graficar la situación (ver figura adyacente).



Definimos los sucesos:

- *B*: obtener una bolilla blanca
- *N*: obtener una bolilla negra

a. Aplicamos la fórmula:

$P(N) = \frac{2}{5}$, ya que 2 de las 5 bolillas de la urna son de color negro.

$P(NNN) = P(N) + P(N) + P(N) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

Respuesta: La probabilidad es $\frac{6}{5}$.

b. Aplicamos la fórmula:

$P(N) = \frac{2}{5}$, ya que hay 2 bolillas negras de 5 bolillas de la urna.

$P(B) = \frac{3}{5}$, ya que 3 de las 5 bolillas de la urna son de color blanco.

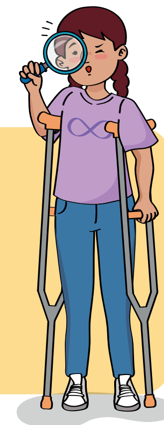
$P(B \cap N \cap B) = P(B) \times P(N) \times P(B) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

Respuesta: La probabilidad es $\frac{8}{5}$.

Ahora, respondemos la pregunta para corregir el error:

1. ¿Es correcto el procedimiento en la resolución? De no ser así, corrige y responde las preguntas de la situación.

Evaluamos nuestros aprendizajes



Propósito

Determinamos la probabilidad de una situación a través de la regla de Laplace. Expresamos con diversas representaciones la probabilidad. Empleamos diversas estrategias para determinar la probabilidad de sucesos simples. Planteamos afirmaciones sobre las características de una situación aleatoria.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

El ropero de Paola

Paola tiene las siguientes prendas en su ropero (en gavetas separadas).

- 8 blusas: 2 azules, 3 rojas y 3 amarillas
- 10 pantalones: 4 azules, 2 verdes, 3 negros y 1 blanco

Para vestirse un día, saca sin ver una blusa de la gaveta de blusas y, luego, también sin ver, un pantalón de la gaveta de pantalones. Responde las preguntas 1, 2, 3 y 4 teniendo en cuenta que ella se cambia de pantalón y blusa todos los días.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer día saque la combinación de una blusa roja con un pantalón negro?

   a) $\frac{9}{80}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{10}$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo día saque una combinación de un pantalón blanco y una blusa de color amarillo si se sabe que el primer día usó un pantalón verde y una blusa de color azul?

   a) $\frac{1}{21}$ b) $\frac{3}{27}$ c) $\frac{2}{21}$ d) $\frac{3}{80}$

3. El tercer día utilizó 2 pantalones de color negro y 2 blusas, una azul y la otra roja. ¿Cuál es el espacio muestral del suceso compuesto por la extracción al azar de una blusa y de un pantalón para el tercer día?

   a) 48 b) 12 c) 80 c) 60

4. Antes del quinto día, ya ha usado las prendas que se muestran en la tabla.

   Si Paola decide no usar pantalón verde ese día, por lo que retira los pantalones de ese color de la gaveta correspondiente, ¿qué condiciones debe mantener para que el experimento siga siendo aleatorio y cuál sería su espacio muestral?

Ten en cuenta

Para encontrar la **probabilidad** de ocurrencia de un suceso, halla el cociente entre el número de casos favorables $n(A)$ y el número total de casos posibles $n(\Omega)$; es decir:

$$P(A) = \frac{\text{N.º de casos favorables de } A}{\text{N.º de casos posibles}}$$

Día	Blusa	Pantalón
1	roja	negro
2	azul	negro
3	azul	azul
4	amarilla	blanco

El cobrador

Jaime trabaja como cobrador en una unidad de transporte público. A fin de disponer de sencillo para dar el vuelto, ha clasificado las monedas en dos grupos: en su bolsillo derecho ha colocado las monedas de S/1,00 y de S/0,50, y en el izquierdo, las monedas de S/2,00 y S/5,00.
En cierto momento, Jaime tiene la siguiente cantidad de monedas: 8 monedas de S/0,50; 12 de S/1,00; 9 de S/2,00 y 11 de S/5,00.

Con la información dada, responde las preguntas 5, 6 y 7.

5. Si Jaime extrae sin ver dos monedas de su bolsillo izquierdo, ¿cuál es la probabilidad de que extraiga exactamente S/7,00?

6. Si Jaime extrae una moneda de su bolsillo derecho y otra moneda del izquierdo, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las cantidades de las monedas supere los S/3,00?

7. Si Jaime extrae sin reposición dos monedas, una después de otra, de su bolsillo derecho, ¿cuál es la probabilidad de sacar dos monedas idénticas en las dos extracciones?

8. Jorge sabe que la probabilidad de ganar un juego M es 0,20 y la probabilidad de ganar un juego N es 0,30. Si la probabilidad de ganar ambos es 0,1, ¿cuál es la probabilidad de no ganar ni el juego M ni el juego N?

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

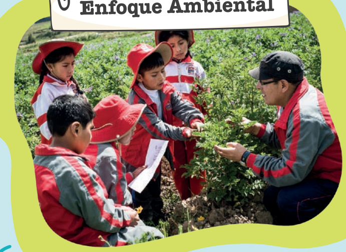
Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Determiné la probabilidad de una situación a través de la regla de Laplace.			
Expresé con diversas representaciones y lenguaje matemático mi comprensión sobre el valor de la probabilidad.			
Empleé diversas estrategias para determinar la probabilidad de sucesos simples.			
Planteé afirmaciones sobre las características de una situación aleatoria o probabilidad condicional, eventos dependientes e independientes, y analicé los datos de una probabilidad.			

Enfoques transversales

Enfoque Inclusivo o de Atención a la Diversidad

Busca reconocer y valorar a todas las personas por igual, con el fin de erradicar la exclusión, discriminación y desigualdad de oportunidades.

Enfoque Ambiental



Busca formar personas conscientes del cuidado del ambiente, que promuevan el desarrollo de estilos de vida saludables y sostenibles.

Enfoque de Derechos

Fomenta el reconocimiento de los derechos y deberes; asimismo, promueve el diálogo, la participación y la democracia.

Son los valores y actitudes que tenemos al relacionarnos con otras personas y con nuestro entorno, con el fin de generar una sociedad más justa, inclusiva y equitativa para todos.

Enfoque Igualdad de Género

Busca brindar las mismas oportunidades a hombres y mujeres, eliminando situaciones que generan desigualdades entre ellos.

Enfoque Intercultural

Promueve el intercambio de ideas y experiencias entre las distintas formas de ver el mundo.

Enfoque Búsqueda de la Excelencia

Incentiva a los estudiantes a dar lo mejor de sí mismos para alcanzar sus metas y contribuir con su comunidad.

Enfoque Orientación al Bien Común

Busca que el conocimiento, los valores y la educación sean bienes que todos compartimos, promoviendo relaciones solidarias en comunidad.

CARTA DEMOCRÁTICA INTERAMERICANA

I
La democracia y el sistema interamericano

Artículo 1
Los pueblos de América tienen derecho a la democracia y sus gobiernos la obligación de promoverla y defenderla.
La democracia es esencial para el desarrollo social, político y económico de los pueblos de las Américas.

Artículo 2
El ejercicio efectivo de la democracia representativa es la base del estado de derecho y los regímenes constitucionales de los Estados Miembros de la Organización de los Estados Americanos. La democracia representativa se refuerza y profundiza con la participación permanente, ética y responsable de la ciudadanía en un marco de legalidad conforme al respectivo orden constitucional.

Artículo 3
Son elementos esenciales de la democracia representativa, entre otros, el respeto a los derechos humanos y las libertades fundamentales; el acceso al poder y su ejercicio con sujeción al estado de derecho; la celebración de elecciones periódicas, libres, justas y basadas en el sufragio universal y secreto como expresión de la soberanía del pueblo; el régimen plural de partidos y organizaciones políticas; y la separación e independencia de los poderes públicos.

Artículo 4
Son componentes fundamentales del ejercicio de la democracia la transparencia de las actividades gubernamentales, la probidad, la responsabilidad de los gobiernos en la gestión pública, el respeto por los derechos sociales y la libertad de expresión y de prensa.
La subordinación constitucional de todas las instituciones del Estado a la autoridad civil legalmente constituida y el respeto al estado de derecho de todas las entidades y sectores de la sociedad son igualmente fundamentales para la democracia.

Artículo 5
El fortalecimiento de los partidos y de otras organizaciones políticas es prioritario para la democracia. Se deberá prestar atención especial a la problemática derivada de los altos costos de las campañas electorales y al establecimiento de un régimen equilibrado y transparente de financiación de sus actividades.

Artículo 6
La participación de la ciudadanía en las decisiones relativas a su propio desarrollo es un derecho y una responsabilidad. Es también una condición necesaria para el pleno y efectivo ejercicio de la democracia. Promover y fomentar diversas formas de participación fortalece la democracia.

II
La democracia y los derechos humanos

Artículo 7
La democracia es indispensable para el ejercicio efectivo de las libertades fundamentales y los derechos humanos, en su carácter universal, indivisible e interdependiente, consagrados en las respectivas constituciones de los Estados y en los instrumentos interamericanos e internacionales de derechos humanos.

Artículo 8
Cualquier persona o grupo de personas que consideren que sus derechos humanos han sido violados pueden interponer denuncias o peticiones ante el sistema interamericano de promoción y protección de los derechos humanos conforme a los procedimientos establecidos en el mismo.
Los Estados Miembros reafirman su intención de fortalecer el sistema interamericano de protección de los derechos humanos para la consolidación de la democracia en el Hemisferio.

Artículo 9
La eliminación de toda forma de discriminación, especialmente la discriminación de género, étnica y racial, y de las diversas formas de intolerancia, así como la promoción y protección de los derechos humanos de los pueblos indígenas y los migrantes y el respeto a la diversidad étnica, cultural y religiosa en las Américas, contribuyen al fortalecimiento de la democracia y la participación ciudadana.

Artículo 10
La promoción y el fortalecimiento de la democracia requieren el ejercicio pleno y eficaz de los derechos de los trabajadores y la aplicación de normas laborales básicas, tal como están consagradas en la Declaración de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) relativa a los Principios y Derechos Fundamentales en el Trabajo y su Seguimiento, adoptada en 1998, así como en otras convenciones básicas afines de la OIT. La democracia se fortalece con el mejoramiento de las condiciones laborales y la calidad de vida de los trabajadores del Hemisferio.

III
Democracia, desarrollo integral y combate a la pobreza

Artículo 11
La democracia y el desarrollo económico y social son interdependientes y se refuerzan mutuamente.

Artículo 12
La pobreza, el analfabetismo y los bajos niveles de desarrollo humano son factores que inciden negativamente en la consolidación de la democracia. Los Estados Miembros de la OEA se comprometen a adoptar y ejecutar todas las acciones necesarias para la creación de empleo productivo, la reducción de la pobreza y la erradicación de la pobreza extrema, teniendo en cuenta las diferentes realidades y condiciones económicas de los países del Hemisferio. Este compromiso común frente a los problemas del desarrollo y la pobreza también destaca la importancia de mantener los equilibrios macroeconómicos y el imperativo de fortalecer la cohesión social y la democracia.

Artículo 13
La promoción y observancia de los derechos económicos, sociales y culturales son consustanciales al desarrollo integral, al crecimiento económico con equidad y a la consolidación de la democracia en los Estados del Hemisferio.

Artículo 14
Los Estados Miembros acuerdan examinar periódicamente las acciones adoptadas y ejecutadas por la Organización encaminadas a fomentar el diálogo, la cooperación para el desarrollo integral y el combate a la pobreza en el Hemisferio, y tomar las medidas oportunas para promover estos objetivos.

Artículo 15
El ejercicio de la democracia facilita la preservación y el manejo adecuado del medio ambiente. Es esencial que los Estados del Hemisferio implementen políticas y estrategias de protección del medio ambiente, respetando los diversos tratados y convenciones, para lograr un desarrollo sostenible en beneficio de las futuras generaciones.

Artículo 16
La educación es clave para fortalecer las instituciones democráticas, promover el desarrollo del potencial humano y el alivio de la pobreza y fomentar un mayor entendimiento entre los pueblos. Para lograr estas metas, es esencial que una educación de calidad esté al alcance de todos, incluyendo a las niñas y las mujeres, los habitantes de las zonas rurales y las personas que pertenecen a las minorías.

IV
Fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática

Artículo 17
Cuando el gobierno de un Estado Miembro considere que está en riesgo su proceso político institucional democrático o su legítimo ejercicio del poder, podrá recurrir al Secretario General o al Consejo Permanente a fin de solicitar asistencia para el fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática.

Artículo 18
Cuando en un Estado Miembro se produzcan situaciones que pudieran afectar el desarrollo del proceso político institucional democrático o el legítimo ejercicio del poder, el Secretario General o el Consejo Permanente podrá, con el consentimiento previo del gobierno afectado, disponer visitas y otras gestiones con la finalidad de hacer un análisis de la situación. El Secretario General elevará un informe al Consejo Permanente, y éste realizará una apreciación colectiva de la situación y, en caso necesario, podrá adoptar decisiones dirigidas a la preservación de la institucionalidad democrática y su fortalecimiento.

Artículo 19
Basado en los principios de la Carta de la OEA y con sujeción a sus normas, y en concordancia con la cláusula democrática contenida en la Declaración de la ciudad de Quebec, la ruptura del orden democrático o una alteración del orden constitucional que afecte gravemente el orden democrático en un Estado Miembro constituye, mientras persista, un obstáculo insuperable para la participación de su gobierno en las sesiones de la Asamblea General, de la Reunión de Consulta, de los Consejos de la Organización y de las conferencias especializadas, de las comisiones, grupos de trabajo y demás órganos de la Organización.

Artículo 20
En caso de que en un Estado Miembro se produzca una alteración del orden constitucional que afecte gravemente su orden democrático, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá solicitar la convocatoria inmediata del Consejo Permanente para realizar una apreciación colectiva de la situación y adoptar las decisiones que estime conveniente.
El Consejo Permanente, según la situación, podrá disponer la realización de las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.
Si las gestiones diplomáticas resultaren infructuosas o si la urgencia del caso lo aconsejare, el Consejo Permanente convocará de inmediato un período extraordinario de sesiones de la Asamblea General para que ésta adopte las decisiones que estime apropiadas, incluyendo gestiones diplomáticas, conforme a la Carta de la Organización, el derecho internacional y las disposiciones de la presente Carta Democrática.
Durante el proceso se realizarán las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Artículo 21
Cuando la Asamblea General, convocada a un período extraordinario de sesiones, constate que se ha producido la ruptura del orden democrático en un Estado Miembro y que las gestiones diplomáticas han sido infructuosas, conforme a la Carta de la OEA tomará la decisión de suspender a dicho Estado Miembro del ejercicio de su derecho de participación en la OEA con el voto afirmativo de los dos tercios de los Estados Miembros. La suspensión entrará en vigor de inmediato.
El Estado Miembro que hubiera sido objeto de suspensión deberá continuar observando el cumplimiento de sus obligaciones como miembro de la Organización, en particular en materia de derechos humanos.
Adoptada la decisión de suspender a un gobierno, la Organización mantendrá sus gestiones diplomáticas para el restablecimiento de la democracia en el Estado Miembro afectado.

Artículo 22
Una vez superada la situación que motivó la suspensión, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá proponer a la Asamblea General el levantamiento de la suspensión. Esta decisión se adoptará por el voto de los dos tercios de los Estados Miembros, de acuerdo con la Carta de la OEA.

V
La democracia y las misiones de observación electoral

Artículo 23
Los Estados Miembros son los responsables de organizar, llevar a cabo y garantizar procesos electorales libres y justos.
Los Estados Miembros, en ejercicio de su soberanía, podrán solicitar a la OEA asesoramiento o asistencia para el fortalecimiento y desarrollo de sus instituciones y procesos electorales, incluido el envío de misiones preliminares para ese propósito.

Artículo 24
Las misiones de observación electoral se llevarán a cabo por solicitud del Estado Miembro interesado. Con tal finalidad, el gobierno de dicho Estado y el Secretario General celebrarán un convenio que determine el alcance y la cobertura de la misión de observación electoral de que se trate. El Estado Miembro deberá garantizar las condiciones de seguridad, libre acceso a la información y amplia cooperación con la misión de observación electoral.
Las misiones de observación electoral se realizarán de conformidad con los principios y normas de la OEA. La Organización deberá asegurar la eficacia e independencia de estas misiones, para lo cual se las dotará de los recursos necesarios. Las mismas se realizarán de forma objetiva, imparcial y transparente, y con la capacidad técnica apropiada.
Las misiones de observación electoral presentarán oportunamente al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, los informes sobre sus actividades.

Artículo 25
Las misiones de observación electoral deberán informar al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, si no existiesen las condiciones necesarias para la realización de elecciones libres y justas.
La OEA podrá enviar, con el acuerdo del Estado interesado, misiones especiales a fin de contribuir a crear o mejorar dichas condiciones.

VI
Promoción de la cultura democrática

Artículo 26
La OEA continuará desarrollando programas y actividades dirigidos a promover los principios y prácticas democráticas y fortalecer la cultura democrática en el Hemisferio, considerando que la democracia es un sistema de vida fundado en la libertad y el mejoramiento económico, social y cultural de los pueblos. La OEA mantendrá consultas y cooperación continua con los Estados Miembros, tomando en cuenta los aportes de organizaciones de la sociedad civil que trabajen en esos ámbitos.

Artículo 27
Los programas y actividades se dirigirán a promover la gobernabilidad, la buena gestión, los valores democráticos y el fortalecimiento de la institucionalidad política y de las organizaciones de la sociedad civil. Se prestará atención especial al desarrollo de programas y actividades para la educación de la niñez y la juventud como forma de asegurar la permanencia de los valores democráticos, incluidas la libertad y la justicia social.

Artículo 28
Los Estados promoverán la plena e igualitaria participación de la mujer en las estructuras políticas de sus respectivos países como elemento fundamental para la promoción y ejercicio de la cultura democrática.

EL ACUERDO NACIONAL

El 22 de julio de 2002, los representantes de las organizaciones políticas, religiosas, del Gobierno y de la sociedad civil firmaron el compromiso de trabajar, todos, para conseguir el bienestar y desarrollo del país. Este compromiso es el Acuerdo Nacional.

El acuerdo persigue cuatro objetivos fundamentales. Para alcanzarlos, todos los peruanos de buena voluntad tenemos, desde el lugar que ocupemos o el rol que desempeñemos, el deber y la responsabilidad de decidir, ejecutar, vigilar o defender los compromisos asumidos. Estos son tan importantes que serán respetados como políticas permanentes para el futuro.

Por esta razón, como niños, niñas, adolescentes o adultos, ya sea como estudiantes o trabajadores, debemos promover y fortalecer acciones que garanticen el cumplimiento de esos cuatro objetivos que son los siguientes:

1. Democracia y Estado de Derecho

La justicia, la paz y el desarrollo que necesitamos los peruanos sólo se pueden dar si conseguimos una verdadera democracia. El compromiso del Acuerdo Nacional es garantizar una sociedad en la que los derechos son respetados y los ciudadanos viven seguros y expresan con libertad sus opiniones a partir del diálogo abierto y enriquecedor; decidiendo lo mejor para el país.

2. Equidad y Justicia Social

Para poder construir nuestra democracia, es necesario que cada una de las personas que conformamos esta sociedad, nos sintamos parte de ella. Con este fin, el Acuerdo promoverá el acceso a las oportunidades económicas, sociales, culturales y políticas. Todos los peruanos tenemos derecho a un empleo digno, a una educación de calidad, a una salud integral, a un lugar para vivir. Así, alcanzaremos el desarrollo pleno.

3. Competitividad del País

Para afianzar la economía, el Acuerdo se compromete a fomentar el espíritu de competitividad en las empresas, es decir, mejorar la calidad de los productos y servicios, asegurar el acceso a la formalización de las pequeñas empresas y sumar esfuerzos para fomentar la colocación de nuestros productos en los mercados internacionales.

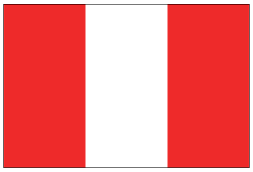
4. Estado Eficiente, Transparente y Descentralizado

Es de vital importancia que el Estado cumpla con sus obligaciones de manera eficiente y transparente para ponerse al servicio de todos los peruanos. El Acuerdo se compromete a modernizar la administración pública, desarrollar instrumentos que eliminen la corrupción o el uso indebido del poder. Asimismo, descentralizar el poder y la economía para asegurar que el Estado sirva a todos los peruanos sin excepción.

Mediante el Acuerdo Nacional nos comprometemos a desarrollar maneras de controlar el cumplimiento de estas políticas de Estado, a brindar apoyo y difundir constantemente sus acciones a la sociedad en general.

SÍMBOLOS DE LA PATRIA

Artículo 49 de la Constitución Política del Perú



BANDERA NACIONAL

ESCUDO NACIONAL

HIMNO NACIONAL DEL PERÚ

CORO

Somos libres, seámoslo siempre,
y antes niegue sus luces el sol,
que faltemos al voto solemne
que la patria al Eterno elevó.

HIMNO NACIONAL

Declaración Universal de los Derechos Humanos

El 10 de diciembre de 1948, la Asamblea General de las Naciones Unidas aprobó y proclamó la Declaración Universal de Derechos Humanos, cuyos artículos figuran a continuación:

Artículo 1
Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, (...) deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

Artículo 2
Toda persona tiene los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición. Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona (...).

Artículo 3
Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

Artículo 4
Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre; la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.

Artículo 5
Nadie será sometido a torturas ni a penas o tratos crueles, inhumanos o degradantes.

Artículo 6
Todo ser humano tiene derecho, en todas partes, al reconocimiento de su personalidad jurídica.

Artículo 7
Todos son iguales ante la ley y tienen, sin distinción, derecho a igual protección de la ley. Todos tienen derecho a igual protección contra toda discriminación que infrinja esta Declaración (...).

Artículo 8
Toda persona tiene derecho a un recurso efectivo, ante los tribunales nacionales competentes, que la ampare contra actos que violen sus derechos fundamentales (...).

Artículo 9
Nadie podrá ser arbitrariamente detenido, preso ni desterrado.

Artículo 10
Toda persona tiene derecho, en condiciones de plena igualdad, a ser oída públicamente y con justicia por un tribunal independiente e imparcial, para la determinación de sus derechos y obligaciones o para el examen de cualquier acusación contra ella en materia penal.

Artículo 11
1. Toda persona acusada de delito tiene derecho a que se presuma su inocencia mientras no se pruebe su culpabilidad (...).
2. Nadie será condenado por actos u omisiones que en el momento de cometerse no fueron delictivos según el Derecho nacional o internacional. Tampoco se impondrá pena más grave que la aplicable en el momento de la comisión del delito.

Artículo 12
Nadie será objeto de injerencias arbitrarias en su vida privada, su familia, su domicilio o su correspondencia, ni de ataques a su honra o a su reputación. Toda persona tiene derecho a la protección de la ley contra tales injerencias o ataques.

Artículo 13
1. Toda persona tiene derecho a circular libremente y a elegir su residencia en el territorio de un Estado.
2. Toda persona tiene derecho a salir de cualquier país, incluso el propio, y a regresar a su país.

Artículo 14
1. En caso de persecución, toda persona tiene derecho a buscar asilo, y a disfrutar de él, en cualquier país.
2. Este derecho no podrá ser invocado contra una acción judicial realmente originada por delitos comunes o por actos opuestos a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 15
1. Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.
2. A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

Artículo 16
1. Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia (...).
2. Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.
3. La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

Artículo 17
1. Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.
2. Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

Artículo 18
Toda persona tiene derecho a la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión (...).

Artículo 19
Todo individuo tiene derecho a la libertad de opinión y de expresión (...).

Artículo 20
1. Toda persona tiene derecho a la libertad de reunión y de asociación pacíficas.
2. Nadie podrá ser obligado a pertenecer a una asociación.

Artículo 21
1. Toda persona tiene derecho a participar en el gobierno de su país, directamente o por medio de representantes libremente escogidos.
2. Toda persona tiene el derecho de acceso, en condiciones de igualdad, a las funciones públicas de su país.
3. La voluntad del pueblo es la base de la autoridad del poder público; esta voluntad se expresará mediante elecciones auténticas que habrán de celebrarse periódicamente, por sufragio universal e igual y por voto secreto u otro procedimiento equivalente que garantice la libertad del voto.

Artículo 22
Toda persona (...) tiene derecho a la seguridad social, y a obtener, (...) habida cuenta de la organización y los recursos de cada Estado, la satisfacción de los derechos económicos, sociales y culturales, indispensables a su dignidad y al libre desarrollo de su personalidad.

Artículo 23
1. Toda persona tiene derecho al trabajo, a la libre elección de su trabajo, a condiciones equitativas y satisfactorias de trabajo y a la protección contra el desempleo.
2. Toda persona tiene derecho, sin discriminación alguna, a igual salario por trabajo igual.
3. Toda persona que trabaja tiene derecho a una remuneración equitativa y satisfactoria, que le asegure, así como a su familia, una existencia conforme a la dignidad humana y que será completada, en caso necesario, por cualesquiera otros medios de protección social.
4. Toda persona tiene derecho a fundar sindicatos y a sindicarse para la defensa de sus intereses.

Artículo 24
Toda persona tiene derecho al descanso, al disfrute del tiempo libre, a una limitación razonable de la duración del trabajo y a vacaciones periódicas pagadas.

Artículo 25
1. Toda persona tiene derecho a un nivel de vida adecuado que le asegure, así como a su familia, la salud y el bienestar, y en especial la alimentación, el vestido, la vivienda, la asistencia médica y los servicios sociales necesarios; tiene asimismo derecho a los seguros en caso de desempleo, enfermedad, invalidez, viudez, vejez y otros casos de pérdida de sus medios de subsistencia por circunstancias independientes de su voluntad.
2. La maternidad y la infancia tienen derecho a cuidados y asistencia especiales. Todos los niños, nacidos de matrimonio o fuera de matrimonio, tienen derecho a igual protección social.

Artículo 26
1. Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo concerniente a la instrucción elemental y fundamental. La instrucción elemental será obligatoria. La instrucción técnica y profesional habrá de ser generalizada; el acceso a los estudios superiores será igual para todos, en función de los méritos respectivos.
2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos; y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz.
3. Los padres tendrán derecho preferente a escoger el tipo de educación que habrá de darse a sus hijos.

Artículo 27
1. Toda persona tiene derecho a tomar parte libremente en la vida cultural de la comunidad, a gozar de las artes y a participar en el progreso científico y en los beneficios que de él resulten.
2. Toda persona tiene derecho a la protección de los intereses morales y materiales que le correspondan por razón de las producciones científicas, literarias o artísticas de que sea autora.

Artículo 28
Toda persona tiene derecho a que se establezca un orden social e internacional en el que los derechos y libertades proclamados en esta Declaración se hagan plenamente efectivos.

Artículo 29
1. Toda persona tiene deberes respecto a la comunidad(...).
2. En el ejercicio de sus derechos y en el disfrute de sus libertades, toda persona estará solamente sujeta a las limitaciones establecidas por la ley con el único fin de asegurar el reconocimiento y el respeto de los derechos y libertades de los demás, y de satisfacer las justas exigencias de la moral, del orden público y del bienestar general en una sociedad democrática.
3. Estos derechos y libertades no podrán en ningún caso ser ejercidos en oposición a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 30
Nada en la presente Declaración podrá interpretarse en el sentido de que confiere derecho alguno al Estado, a un grupo o a una persona, para emprender y desarrollar actividades (...) tendientes a la supresión de cualquiera de los derechos y libertades proclamados en esta Declaración.